

Allgemeine Schalengrundgleichungen

Von Dr.-Ing. Wilhelm Fuchssteiner und Alois Schader, Darmstadt

DK 624.074.4 Schalen

meines

ist nicht das Ziel dieser Abhandlung, fertige Lösungen für ebene Schalenformen zu entwickeln. Vielmehr handelt es sich um theoretischen Grundlagen einer allgemeineren Schalentheorie, um die Aufstellung von Gleichgewichts- und Verformungsbedingungen für beliebige Schalenformen. Die eigentlichen „Lösungen“ sollen späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, die Land von Bauausführungen folgen werden.

des waren es aber Aufgaben aus dem Baugeschehen, die den Maß zu diesen Überlegungen gaben. Die heute üblichen Schalen sind gekennzeichnet durch einen außerordentlich hohen Anteil. Rüstung und Bewehrung verlangen hochqualifizierte Arbeiter. Angesichts der Lohnentwicklung ist damit die Prognose des Schalenbau bereits gestellt.

hyperbolische Paraboloidschale ist als ein Versuch zu werten, die Schwierigkeiten auszuweichen. Die Einfachheit ihrer Schalung gegenüber Brettern und Kanthölzern und ihrer Bewehrung steht auf einer Ebene nur wenig nach. Aber architektonisch ist sie schwer verwertbar.

se angedeuteten und ähnliche Überlegungen lassen die Notwendigkeit erkennen, andere Schalenformen zu erproben. Hier soll aber über bestimmte Formen noch nichts gesagt werden. Es sei festgestellt: für ganz wenige bekannte Formen liegen ausführliche Grundlagen vor (z. B. für Kuppeln, Kreissegmentalschalen). Für die Formen, deren Anwendung an sich oft gewünscht wird, haben wir unzureichende Grundlagen (wie die Membranverformungsbedingungen der hyperbolischen Paraboloidschale [1]) oder aber gar keine (wie bei der Wendeltreppe). Diesen gegenüber stehen sehr viele nicht bekannte Formen, die vermutlich nur durch Zufall entwickelt werden können, wenn es keine allgemeinere Theorie gibt. Das ist der eigentliche Grund für die folgende Entwicklung.

ein lohnendes Fernziel für die weitere Forschung soll hier nur eines erwähnt werden: I. a. sind die Form bekannt und die Form unbekannt. Bedeutsam wäre aber u. U. die umgekehrte Stellung: Gefordert ist eine möglichst momentenfreie Schale, gesucht wird die Form, die diese Bedingung am besten erfüllt (bei Bogenstaumauern).

a einer allgemeineren Schalentheorie läßt sich vielleicht auch Übergang finden zu den „veränderlichen Systemen“, die teilweise bei Stabilitätsproblemen berücksichtigt werden müssen. Aber das Verfahren selber sei noch folgendes gesagt: Das Prinzip des Minimum der Formänderungsarbeit ist auch anwendbar auf nicht (auch räumlich) gekrümmte Stäbe. Auch läßt sich jede Art der Anisotropie mit beliebiger Genauigkeit berücksichtigen. Wenn man auch aus praktischen Gründen gewisse Vernachlässigungen macht, so ist die Durchführung der Entwicklung keineswegs an diese Vernachlässigungen gebunden. Wir erachten es aber unter diesen Gesichtspunkten für sinnlos, die Fehlergrenzen noch weiter einzuengen als z. B. die Betonier- und Walztoleranzen.

e Grundlagen

führen folgende Vereinfachungen ein:

ist ein Querschnitt gerade, aber die Stabachse krumm, so sind die Biegespannungen nicht linear (Bild 1a). Wir rechnen trotzdem mit linear verteilten Spannungen.

ist die Stabachse gerade, der Querschnitt aber krumm (Bild 1b), so sind die Biegespannungen zwar linear, aber die neutrale Faser ist gegenüber der Schalenmittelfläche um $h^2/12r$ nach

außen verschoben. Wir nehmen trotzdem den Querschnittsschwerpunkt in der Mitte an.

3. Die „Schubverformung“, d. h. den Einfluß der Querkkräfte auf die Verformung vernachlässigen wir.

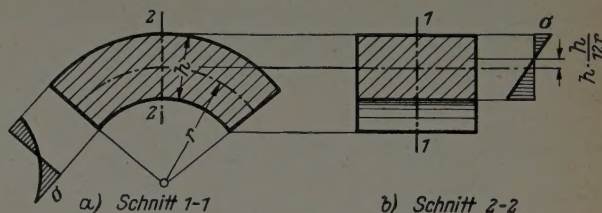


Bild 1

1. und 3. wird üblicherweise vernachlässigt, 2. nicht immer. Die Fehler liegen annähernd in der gleichen Größenordnung und betragen weniger als 1% für σ .

Wir benutzen ein rechtwinkliges Koordinatensystem xyz . Die x - y -Ebene ist die Grundrißebene und z (nach unten positiv) die Ordinate der Schalenform. Differentialquotienten schreiben wir in der vereinfachten Form:

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = R'; \quad \frac{\partial R(x, y)}{\partial y} = R''.$$

Die Schalentangente ist in x - und y -Richtung gegen die Grundrißebene um den Winkel α bzw. β geneigt. Es bestehen dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} z &= z(x, y), \\ \tan \alpha &= -z', \\ \tan \beta &= -z''. \end{aligned} \quad \begin{aligned} (a) \\ (b) \end{aligned} \quad (1)$$

Wir schneiden durch achsenrechte Schnitte ein Element aus der Schale heraus. Seine Grundrißprojektion ist immer rechteckig (Bild 2) und hat den Flächeninhalt $dx \cdot dy$. Das Element selber hat die Seitenlängen $dx/\cos \alpha$ und $dy/\cos \beta$. Seine Seiten schließen den Winkel δ ein, der i. a. kein rechter ist. Ohne Beweis sei festgestellt, daß

$$\cos \delta = \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (2)$$

Die Schnittkräfte werden durch Bild 2 und 3 definiert. Erläuternd sei hierzu gesagt:

1. Die Schnittkraftresultanten (Bild 2) N und M liegen in der

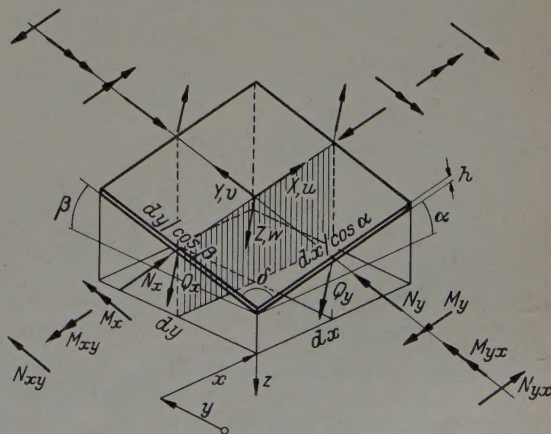


Bild 2. Schnittkraftresultanten

Die kürzeste Entfernung bis zur Höhenlinie ergibt sich damit ebenfalls im Grundriß) zu $e = 1/\sqrt{\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta}$. Aus der Darstellung Bild 5 folgt nun, daß die senkrechte Komponente von Q_x gleich $1/\sqrt{1+e^2}$ sein muß, also das $1/\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha + \text{tg}^2\beta}$ -fache von Q_x . Ferner geht aus der Grundriß-Skizze hervor, daß die x - und y -Komponenten sich verhalten müssen, wie $\text{ctg}\beta/\text{ctg}\alpha$ oder wie $\text{tg}\beta$. Diese Bedingungen werden durch unseren Ansatz erfüllt.

$$N_x = N_x \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + Q_x \cdot \frac{\text{tg } \alpha}{\varepsilon \cos \beta}, \quad (a)$$

$$N_y = N_y \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + Q_y \cdot \frac{\text{tg } \beta}{\varepsilon \cos \alpha}, \quad (b)$$

$$N_{xy} = N_{xy} + Q_x \cdot \frac{\text{tg } \beta}{\varepsilon \cos \beta}, \quad (c)$$

$$N_{yx} = N_{yx} + Q_y \cdot \frac{\text{tg } \alpha}{\varepsilon \cos \alpha}, \quad (d)$$

$$M_x = + Q_x \cdot \frac{1}{\varepsilon \cos \beta} - N_{xy} \cdot \text{tg } \beta - N_x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta}, \quad (e)$$

$$M_y = + Q_y \cdot \frac{1}{\varepsilon \cos \alpha} - N_{yx} \cdot \text{tg } \alpha - N_y \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}, \quad (f)$$

$$M_{xy} = M_{xy}, \quad (g)$$

$$M_{yx} = M_{yx}, \quad (h)$$

$$M_{xy} = M_{xy} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}, \quad (i)$$

$$M_{yx} = M_{yx} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}, \quad (k)$$

$$M_x = M_{xy} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} - M_x \cdot \text{tg } \beta = \bar{M}_{xy} \text{tg } \alpha - \bar{M}_x \text{tg } \beta, \quad (l)$$

$$M_y = M_{yx} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} - M_y \cdot \text{tg } \alpha = \bar{M}_{yx} \text{tg } \beta - \bar{M}_y \text{tg } \alpha. \quad (m)$$

Die äußere Arbeit der Schnittkräfte

Wir betrachten das Schalelement als ein statisch unbestimmtes System und die Schnittkräfte als die statisch unbestimmten Größen, die dann natürlich abhängig sind von den Verschiebungen und Verdrehungen der Elementränder.

Die Entwicklung führen wir vorteilhaft mit den Schnittkraftkomponenten durch (Bild 3). Betrachten wir zunächst die Arbeit der Kräfte im Schnitt $x = \text{const}$: Dort wirken insgesamt 3 Kräfte 3 Momente. Der Rand verschiebt sich um $\bar{u}$, $\bar{v}$ und $\bar{w}$, und diese Verschiebungen fallen genau in die Richtung der zugehörigen Kräfte $\bar{N}_{xy}$ und $\bar{N}_{xz}$. Die Arbeitsanteile der Kräfte ermitteln sich also einfach nach dem Satz: Arbeit = Kraft mal Weg, z. B.

$\bar{N}_{xy} \cdot \bar{u}$. Die Momente leisten dann eine Arbeit, wenn das Element sich dreht. Da die Momenten-Vektoren genau in Richtung der Achsen liegen, müssen wir unter den Verdrehungen ebenfalls reine Axialverdrehungen verstehen. Wir nennen den Drehwinkel z. B. um die x -Achse ω_x . Er ist positiv, wenn er in x -Richtung gesehen nach rechts erfolgt. Die Arbeit der Momente ist dann gleich Moment mal Drehwinkel. In der Fuge x ist die Arbeit aller Kräfte wie in (8a) angegeben:

$$A_x = d\bar{y} (\bar{N}_{xy} \bar{u} + \bar{N}_{xy} \bar{v} + \bar{N}_{xz} \bar{w} + \bar{M}_x \omega_y - \bar{M}_{xy} \omega_x + \bar{M}_{xz} \omega_z), \quad (a)$$

$$A_y = dx (\bar{N}_{yx} \bar{v} + \bar{N}_{yx} \bar{u} + \bar{N}_{yz} \bar{w} - \bar{M}_y \omega_x + \bar{M}_{yx} \omega_y - \bar{M}_{yz} \omega_z). \quad (b)$$

Gleichung (8b) ergibt sich analog für die Fuge y .

Die gegenüberliegenden Fugen ist die Krafttrichtung umgekehrt, die Verschiebungsrichtung aber die gleiche. Die Arbeit ist also negativ, allerdings vermehrt um ein Differential:

$$A_{(x+dx)} = -(A_x + A_x' dx),$$

$$A_{(y+dy)} = -(A_y + A_y' dy).$$

Es kommt noch die Arbeit der Belastungen hinzu mit z. B. $\bar{N}_x \cdot \bar{u}$ und die Arbeit der Kräftepaare mit z. B. $N_y dx \cdot dy \text{tg } \beta \cdot \omega_x$. Es wird dann die gesamte Arbeit der äußeren Kräfte

$$A_a = -A_x' dx - A_y' dy + dx dy (\bar{X} \bar{u} + \bar{Y} \bar{v} + \bar{Z} \bar{w}) + dx dy [(\bar{N}_y \text{tg } \beta + \bar{N}_{xy} \cdot \text{tg } \alpha + \bar{N}_{yz}) \omega_x - (\bar{N}_x \text{tg } \alpha + \bar{N}_{yx} \text{tg } \beta + \bar{N}_{xz}) \omega_y + (\bar{N}_{xy} - \bar{N}_{yx}) \omega_z].$$

Mit (8) wird hieraus

$$A_a = -dx dy [(\bar{M}_x \omega_y)' + (\bar{M}_{yx} \omega_y)' + (\bar{N}_x \text{tg } \alpha + \bar{N}_{yx} \text{tg } \beta + \bar{N}_{xz}) \omega_y - (\bar{M}_y \omega_x)' - (\bar{M}_{xy} \omega_x)' - (\bar{N}_y \text{tg } \beta + \bar{N}_{xy} \text{tg } \alpha + \bar{N}_{yz}) \omega_x + (\bar{M}_{xz} \omega_z)' - (\bar{M}_{yz} \omega_z)' + (\bar{N}_{yx} - \bar{N}_{xy}) \omega_z + (\bar{N}_x \bar{u})' + (\bar{N}_{yx} \bar{u})' - \bar{X} \bar{u} + (\bar{N}_y \bar{v})' + (\bar{N}_{xy} \bar{v})' - \bar{Y} \bar{v} + (\bar{N}_{xz} \bar{w})' + (\bar{N}_{yz} \bar{w})' - \bar{Z} \bar{w}]. \quad (9)$$

Für reine Translationen, z. B. $\bar{u}$, $\bar{v}$ oder $\bar{w} = 1$, und für reine Rotationen, z. B. ω_x , ω_y oder $\omega_z = 1$, muß die Arbeitsaufnahme A_a gleich null werden. Indem wir nacheinander für die Verschiebungen und Verdrehungen 1 und für A_a null setzen, erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \bar{M}_x' + \bar{M}_{yx}' + \bar{N}_x \text{tg } \alpha + \bar{N}_{yx} \text{tg } \beta + \bar{N}_{xz}, & (a) \\ 0 &= \bar{M}_y' + \bar{M}_{xy}' + \bar{N}_y \text{tg } \beta + \bar{N}_{xy} \text{tg } \alpha + \bar{N}_{yz}, & (b) \\ 0 &= \bar{M}_{xz}' - \bar{M}_{yz}' + \bar{N}_{yx} - \bar{N}_{xy}, & (c) \\ \bar{X} &= \bar{N}_x' + \bar{N}_{yx}', & (d) \\ \bar{Y} &= \bar{N}_y' + \bar{N}_{xy}', & (e) \\ \bar{Z} &= \bar{N}_{xz}' + \bar{N}_{yz}'. & (f) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dies sind die Gleichgewichtsgleichungen. Setzen wir sie in (9) ein, so erhalten wir als

äußere Arbeit

$$A_a = -dx dy [\bar{M}_x \omega_y' + \bar{M}_{yx} \omega_y' - \bar{M}_y \omega_x' - \bar{M}_{xy} \omega_x' + \bar{M}_{xz} \omega_z' - \bar{M}_{yz} \omega_z' + \bar{N}_x \bar{u}' + \bar{N}_{yx} \bar{u}' + \bar{N}_y \bar{v}' + \bar{N}_{xy} \bar{v}' + \bar{N}_{xz} \bar{w}' + \bar{N}_{yz} \bar{w}']. \quad (11)$$

Setzen wir hier die Schnittkraftresultanten nach (7) ein, so können wir die Querkräfte Q voraussetzungsgemäß vernachlässigen; denn die Formänderungsarbeit der Querkräfte spielt namentlich bei dünnen Schalen keine erwähnenswerte Rolle. Mit gleichzeitiger Verwendung von (5) wird dann

$$A_a = -dx dy \left\{ M_x [\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta - \cos \delta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta)] - M_y [\omega_x' - \omega_z' \text{tg } \alpha - \cos \delta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta)] + M_{xy} \left[\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta) - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\omega_x' - \omega_z' \text{tg } \alpha) \right] + N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \text{tg } \alpha) + N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\bar{v}' - \bar{w}' \text{tg } \beta) + N_{xy} (\bar{u}' + \bar{v}' - \bar{w}' \text{tg } \alpha - \bar{w}' \text{tg } \beta) \right\}. \quad (12)$$

Wir brauchen später noch die Differentialquotienten

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_a}{\partial M_x} &= -dx dy \left[\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta - \cos \delta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta) \right], \\ \frac{\partial A_a}{\partial M_y} &= -dx dy \left[\omega_x' - \omega_z' \text{tg } \alpha - \cos \delta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta) \right], \\ \frac{\partial A_a}{\partial M_{xy}} &= -dx dy \left[\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_y' - \omega_z' \text{tg } \beta) - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\omega_x' - \omega_z' \text{tg } \alpha) \right], \\ \frac{\partial A_a}{\partial N_x} &= -dx dy \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \text{tg } \alpha), \\ \frac{\partial A_a}{\partial N_y} &= -dx dy \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\bar{v}' - \bar{w}' \text{tg } \beta), \\ \frac{\partial A_a}{\partial N_{xy}} &= -dx dy (\bar{u}' + \bar{v}' - \bar{w}' \text{tg } \alpha - \bar{w}' \text{tg } \beta). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Hier müssen nun die ω durch $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ oder deren Ableitungen ausgedrückt werden. Um die Rechnung durchzuführen, ersetzen wir in den folgenden Betrachtungen das Schalelement durch die Tangentialebene an die Schale in x , y . Die tatsächliche Krümmung des Elementes wird dadurch eingeführt, daß in (11) bis (13) die Differentialquotienten der ω Verwendung finden, durch die ja berücksichtigt wird, daß im Punkt $x + dx$ und $y + dy$ die Tangentialebene eine andere ist.

Die Tangentialebene hat die Gleichung

$$z = z_0 - x \text{tg } \alpha - y \text{tg } \beta. \quad (14)$$

Sie erfährt Verschiebungen aus Translationen, Rotationen und Verzerrungen. Unter $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ und deren Ableitungen haben wir also Verschiebungen zu verstehen, in denen alle Einflüsse enthalten sind, die in einer ebenen Fläche wirksam sein können ohne deren Charakter als Ebene zu ändern. Dies sind

1. Reine Translationen. Sie können ohne weitere Erläuterungen angegeben werden:

$$\bar{u} = \bar{u}_0, \bar{v} = \bar{v}_0, \bar{w} = \bar{w}_0.$$

2. Reine Rotationen um die Achsen x , y , z , und zwar mit den Drehwinkeln ω_x , ω_y , ω_z . Die ω sind wieder positiv, wenn sie in der entsprechenden Achsrichtung gesehen nach rechts drehen. Für solche Rotationen wird

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -\omega_y z + \omega_z y, \\ \bar{v} &= \omega_x z - \omega_z x, \\ \bar{w} &= -\omega_x y + \omega_y x.\end{aligned}$$

3. Reine Verzerrungen in der Tangentialebene. Die $\bar{u}$ - und $\bar{v}$ -Verschiebungen müssen proportional x und y sein. Da aber durch ein $\bar{u}$ allein ein Punkt aus der Ebene heraus gerät, muß er durch ein entsprechendes $\bar{w} = -\bar{u} \operatorname{tg} \alpha$ wieder in die Tangentialebene hineingeschoben werden. Das gleiche gilt für $\bar{v}$. Es ist mithin

$$\begin{aligned}\bar{u} &= ax + cy, \\ \bar{v} &= by + dx, \\ \bar{w} &= -ax \operatorname{tg} \alpha - by \operatorname{tg} \beta - cy \operatorname{tg} \alpha - dx \operatorname{tg} \beta.\end{aligned}$$

4. Eine reine Rotation in der Tangentialebene mit dem Drehwinkel ω_0 . Diese kann (als Kombination der unter 2. genannten Rotationen) dargestellt werden mit

$$\left. \begin{aligned}\Delta \omega_x &= \omega_0 \sin \alpha \cos \beta, \\ \Delta \omega_y &= \omega_0 \sin \beta \cos \alpha, \\ \Delta \omega_z &= \omega_0 \cos \alpha \cos \beta.\end{aligned} \right\} (15)$$

Es ist dann nach 2.

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \omega_0 \cos \alpha (y \cos \beta - z \sin \beta), \\ \bar{v} &= \omega_0 \cos \beta (z \sin \alpha - x \cos \alpha), \\ \bar{w} &= \omega_0 (x \cos \alpha \sin \beta - y \sin \alpha \cos \beta).\end{aligned}$$

Daß es sich hier um eine Drehung in der Tangentialebene handelt, kann leicht daran erkannt werden, daß $\bar{w} = -\bar{u} \operatorname{tg} \alpha - \bar{v} \operatorname{tg} \beta$ ist.

Fassen wir nun die Verschiebungen 1. bis 4. zusammen, so erhalten wir unter Verwendung von (14)

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}_0 - \omega_y z_0 + x(\omega_y \operatorname{tg} \alpha + a + \omega_0 \sin \alpha \sin \beta) \\ &\quad + y(\omega_y \operatorname{tg} \beta + \omega_z + c + \omega_0 \cos \alpha / \cos \beta), \\ \bar{v} &= \bar{v}_0 + \omega_x z_0 + x(-\omega_x \operatorname{tg} \alpha - \omega_z + d - \omega_0 \cos \beta / \cos \alpha) \\ &\quad + y(-\omega_x \operatorname{tg} \beta + b - \omega_0 \sin \alpha \sin \beta), \\ \bar{w} &= \bar{w}_0 + x(\omega_y - c \operatorname{tg} \alpha - d \operatorname{tg} \beta + \omega_0 \cos \alpha \sin \beta) \\ &\quad + y(-\omega_x - b \operatorname{tg} \beta - c \operatorname{tg} \alpha - \omega_0 \sin \alpha \cos \beta).\end{aligned}$$

Die Differentiation liefert:

$$\begin{aligned}\bar{u}' &= \omega_y \operatorname{tg} \alpha + a + \omega_0 \sin \alpha \sin \beta, \\ \bar{u}'' &= \omega_y \operatorname{tg} \beta + \omega_z + c + \omega_0 \cos \alpha / \cos \beta, \\ \bar{v}' &= -\omega_x \operatorname{tg} \alpha - \omega_z + d - \omega_0 \cos \beta / \cos \alpha, \\ \bar{v}'' &= -\omega_x \operatorname{tg} \beta + b - \omega_0 \sin \alpha \sin \beta, \\ \bar{w}' &= \omega_y - a \operatorname{tg} \alpha - d \operatorname{tg} \beta + \omega_0 \cos \alpha \sin \beta, \\ \bar{w}'' &= -\omega_x - b \operatorname{tg} \beta - c \operatorname{tg} \alpha - \omega_0 \sin \alpha \cos \beta.\end{aligned}$$

Die sechs Differentialquotienten von $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ setzen sich also aus acht Einflüssen (4 ω und a , b , c , d) zusammen. Wenn wir nun die ω und a , b , c , d durch die Differentialquotienten der Verschiebungen ausdrücken wollen, haben wir acht Unbekannte und nur sechs Gleichungen. Dies ist der Grund dafür, weshalb wir das an sich überflüssige ω_0 noch eingeführt haben. Wir können nämlich irgendein ω_0 wählen, ohne den Arbeitsanteil der Momente überhaupt zu verändern. Man erkennt dies schon unmittelbar aus Bild 2, kann es aber auch formal beweisen, indem man den Arbeitsanteil der Momente z . B. in (8a) für die ω nach (15) ermittelt. Ersetzt man nämlich die M durch die M nach (7), so verschwindet dieser Anteil.

Wir werden also ω_0 so wählen, daß die acht Unbekannten auf sechs vermindert werden.

Nun haben die a , b , c , d an und für sich unmittelbar überhaupt

keine Bedeutung. Wir benötigen sie nur mittelbar, weil sie auf die $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ haben, und wir die ω ausdrücken müssen durch $\bar{u}'$, $\bar{u}''$ usw., in denen auch die Einflüsse der a , b , c , d enthalten

Aus der letzten Gleichungsgruppe erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{w}' + \bar{u}' \operatorname{tg} \alpha + \bar{v}' \operatorname{tg} \beta &= \omega_y (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \omega_x \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \omega_z \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \\ \bar{w}'' + \bar{u}'' \operatorname{tg} \alpha + \bar{v}'' \operatorname{tg} \beta &= -\omega_x (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) + \omega_y \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \omega_z \\ \bar{u}' - \bar{v}' &= \omega_y \operatorname{tg} \beta + \omega_x \operatorname{tg} \alpha + 2 \omega_z \\ &\quad + c - d + \omega_0 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) / \cos \alpha \cos \beta.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir ganz erheblich vereinfachen

$$\omega_0 \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \bar{u}' - \bar{v}' - (c - d) + \omega_y \operatorname{tg} \beta + \omega_x \operatorname{tg} \alpha.$$

Hiermit formen wir die dritte Gleichung um in

$$\omega_z = -\omega_x \operatorname{tg} \alpha - \omega_y \operatorname{tg} \beta.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen wird dann

$$\begin{aligned}\bar{w}' + \bar{u}' \operatorname{tg} \alpha + \bar{v}' \operatorname{tg} \beta &= \omega_y (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta), \\ \bar{w}'' + \bar{u}'' \operatorname{tg} \alpha + \bar{v}'' \operatorname{tg} \beta &= -\omega_x (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta).\end{aligned}$$

Mit (6) erhalten wir also

$$\left. \begin{aligned}\omega_y &= + \frac{1}{\varepsilon^2} (\bar{w}' + \bar{u}' \operatorname{tg} \alpha + \bar{v}' \operatorname{tg} \beta), & (a) \\ \omega_x &= - \frac{1}{\varepsilon^2} (\bar{w}'' + \bar{u}'' \operatorname{tg} \alpha + \bar{v}'' \operatorname{tg} \beta), & (b) \\ \omega_z &= -\omega_x \operatorname{tg} \alpha - \omega_y \operatorname{tg} \beta. & (c)\end{aligned} \right\}$$

Wir wollen noch die Gleichgewichtsgleichungen (10) etwas umformen

Durch Einsetzen von (7) in die Gleichungen (10) erhalten wir:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= (N_{xy})' + \left(N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)' + \left(Q_y \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon \cos \alpha} \right)' + \left(Q_x \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon \cos \beta} \right)', & (a) \\ \bar{Y} &= (N_{xy})' + \left(N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)' + \left(Q_x \frac{\operatorname{tg} \beta}{\varepsilon \cos \beta} \right)' + \left(Q_y \frac{\operatorname{tg} \beta}{\varepsilon \cos \alpha} \right)', & (b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{Z} &= -(N_{xy} \operatorname{tg} \beta)' - (N_{xy} \operatorname{tg} \alpha)' - \left(N_x \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right)' \\ &\quad - \left(N_y \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right)' + \left(Q_x \frac{1}{\varepsilon \cos \beta} \right)' + \left(Q_y \frac{1}{\varepsilon \cos \alpha} \right)', & (c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= (M_y)' + \left(M_{xy} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)' + Q_x \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\varepsilon \cos \beta} + Q_y \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{\varepsilon \cos \alpha} \\ &\quad + (N_{xy} - N_{yx}) \operatorname{tg} \alpha, & (d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= (M_x)' + \left(M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)' + Q_y \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\varepsilon \cos \alpha} + Q_x \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\varepsilon \cos \beta} \\ &\quad + (N_{yx} - N_{xy}) \operatorname{tg} \beta, & (e)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \left(M_{xy} \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \right)' - \left(M_{yx} \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right)' + (M_y \operatorname{tg} \alpha)' \\ &\quad - (M_x \operatorname{tg} \beta)' + Q_y \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varepsilon \cos \alpha} - Q_x \frac{\operatorname{tg} \beta}{\varepsilon \cos \beta} + N_{yx} - N_{xy}. & (f)\end{aligned}$$

Wenn wir in (17f) nach der Produktenregel wie beispielsweise differenzieren:

$$\begin{aligned}\left(M_{yx} \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \right)' &= \left(M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \beta \right)' \\ &= \left(M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)' \operatorname{tg} \beta + M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cdot (\operatorname{tg} \beta)'\end{aligned}$$

und die mit $-\operatorname{tg} \alpha$, bzw. $+\operatorname{tg} \beta$ vervielfachten Gleichungen (17d) e) addieren, erhalten wir unter gleichzeitiger Einführung von die Gleichung (18a).

Aus (17d) und e) finden wir durch Elimination die explizite Stellung (18b und c) für Q_x und Q_y . (17a und b) behalten wir unverändert bei, wiederholen sie nur in (18d und e). (17c) differenzieren wir wieder nach der Produktenregel und addieren (17a und b) vorheriger Multiplikation mit $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \beta$. So entsteht dann (18f) womit wir in endgültiger Form die Gleichgewichtsgleichungen haben

Die Gleichgewichtsgleichungen

$$\left. \begin{aligned}0 &= M_{xy} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} z'' - M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} z'' \\ &\quad - (M_x - M_y) z'' + (N_{xy} - N_{yx}) \varepsilon^2, & (a)\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\cos \beta} \left[M_x' + \left(M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)' \right] \right. \\ & \quad \left. + \sin \beta z' \left[M_y' + \left(M_{xy} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)' \right] \right\} \quad (b) \\ & -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\cos \alpha} \left[M_y' + \left(M_{xy} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)' \right] \right. \\ & \quad \left. + \sin \alpha z' \left[M_x' + \left(M_{yx} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)' \right] \right\} \quad (c) \\ & = N_{xy}' + \left(N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right)' - \left(Q_y \frac{z'}{\varepsilon \cos \alpha} \right)' - \left(Q_x \frac{z'}{\varepsilon \cos \beta} \right)', \quad (d) \\ & = N_{xy}' + \left(N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \right)' - \left(Q_x \frac{z'}{\varepsilon \cos \beta} \right)' - \left(Q_y \frac{z'}{\varepsilon \cos \alpha} \right)', \quad (e) \\ & \bar{X} z' + \bar{Y} z' + 2 N_{xy} z'' + N_x \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} z'' + N_y \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} z'' \\ & + \left(\frac{Q_x}{\varepsilon \cos \beta} \right)' \varepsilon^2 + \left(\frac{Q_y}{\varepsilon \cos \alpha} \right)' \varepsilon^2 + \frac{Q_x}{\varepsilon \cos \beta} (z' z'' + z' z'') \\ & + \frac{Q_y}{\varepsilon \cos \alpha} (z' z'' + z' z'') \\ & \text{mit } \varepsilon = \sqrt{1 + z'^2 + z''^2}, \quad z' = -\operatorname{tg} \alpha, \quad z'' = -\operatorname{tg} \beta. \quad (f) \end{aligned} \right\} \text{noch} \quad (18)$$

Die innere Arbeit der Schnittkräfte

Die innere Arbeit der Spannungen ist

$$A_i = \frac{1}{2} \int (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV. \quad (19)$$

bedeutet hier das Volumelement. Die τ_{xz} und τ_{yz} aus Q werden auch hier sinngemäß vernachlässigt. Da die Spannungen orthogonal sind, wird

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) - \alpha \left(t + \frac{s}{h} \Delta t \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) - \alpha \left(t + \frac{s}{h} \Delta t \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned}$$

ist μ die Querdehnungszahl, α der Temperatur-Ausdehnungskoeffizient, t die gleichmäßige Erwärmung und Δt das Temperaturgefälle in Grad. Wir erhalten mit (19)

$$A_i = \frac{1}{2E} \int \left[\sigma_x^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 2(1+\mu) \tau_{xy}^2 - \alpha E \left(t + \frac{s}{h} \Delta t \right) (\sigma_x + \sigma_y) \right] \cdot dV. \quad (20)$$

Die wahre Fläche des Elementes über dem Grundriß $dx \cdot dy$ ist die Schalennittelfläche

$$dF = \frac{dx}{\cos \alpha} \cdot \frac{dy}{\cos \beta} \cdot \sin \delta.$$

Differenzieren wir die Krümmung der Schale durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_x} &= \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}}, \quad (a), (b) \\ \varrho &= \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}, \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ist die Krümmung dann positiv, wenn die Schale von oben gesehen konvex ist. In diesem Fall ist im Abstand s von der Mittelfläche

$$dF = \frac{dx \left(1 + \frac{s}{r_x} \right)}{\cos \alpha} \cdot \frac{dy \left(1 + \frac{s}{r_y} \right)}{\cos \beta} \cdot \sin \delta.$$

Das Volumelement an der Stelle s ist mithin

$$\begin{aligned} dV &= dF \cdot ds \\ &= dx dy ds \frac{\sin \delta}{\cos \alpha \cos \beta} \left(1 + \frac{s}{r_x} + \frac{s}{r_y} + \frac{s^2}{r_x r_y} \right) \\ &\sim dx dy ds \frac{\sin \delta}{\cos \alpha \cos \beta} (1 + s \varrho). \end{aligned} \quad (22)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{1}{J} (M_x \sin^2 \delta + M_{xy} \cos \delta + M_y \cos^2 \delta), \quad (a) \\ m_y &= \frac{1}{J} (M_x \cos^2 \delta - M_{xy} \cos \delta + M_y \sin^2 \delta), \quad (b) \\ m_{xy} &= \frac{1}{J} \sin \delta [(M_y - M_x) \cos \delta + M_{xy}], \quad (c) \\ n_x &= \frac{1}{h \sin \delta} (N_x + 2 N_{xy} \cos \delta + N_y \cos^2 \delta), \quad (d) \\ n_y &= \frac{1}{h} N_y \sin \delta, \quad (e) \\ n_{xy} &= \frac{1}{h} (N_{xy} + N_y \cos \delta), \quad (f) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

so werden die Spannungen aus (3) und (4) zusammen unter Berücksichtigung von (5):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= n_x + s \cdot m_x, \quad (a) \\ \sigma_y &= n_y + s \cdot m_y, \quad (b) \\ \tau_{xy} &= n_{xy} + s \cdot m_{xy}. \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die innere Arbeit wird also nach (20), (22) und (24)

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{dx dy \sin \delta}{2 E \cos \alpha \cos \beta} \int_{-h/2}^{+h/2} ds (1 + \varrho s) \cdot \\ & \cdot \left[(n_x + s m_x)^2 - 2 \mu (n_x + s m_x) (n_y + s m_y) \right. \\ & \quad \left. + (n_y + s m_y)^2 + 2 (1 + \mu) (n_{xy} + s m_{xy})^2 \right. \\ & \quad \left. - \alpha E \left(t + \frac{\Delta t}{h} s \right) (n_x + n_y + s m_x + s m_y) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{+h/2} 1 \cdot ds &= h, \\ \int_{-h/2}^{+h/2} s \cdot ds &= \int_{-h/2}^{+h/2} s^3 \cdot ds = 0, \\ \int_{-h/2}^{+h/2} s^2 ds &= \frac{h^3}{12} = J. \end{aligned}$$

Hiermit wird

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{dx dy \sin \delta}{2 E \cos \alpha \cos \beta} \cdot \\ & \cdot \left\{ h [n_x^2 - 2 \mu n_x n_y + n_y^2 + 2 (1 + \mu) n_{xy}^2 - \alpha E t (n_x + n_y)] \right. \\ & \quad \left. + J [m_x^2 - 2 \mu m_x m_y + m_y^2 + 2 (1 + \mu) m_{xy}^2 - \alpha E \frac{\Delta t}{h} (m_x + m_y)] \right. \\ & \quad \left. + J \varrho \cdot [2 n_x m_x - 2 \mu (n_x m_y + n_y m_x) + 2 n_y m_y \right. \\ & \quad \left. + 4 (1 + \mu) n_{xy} m_{xy} - \alpha E t (m_x + m_y) \right. \\ & \quad \left. - \alpha E \frac{\Delta t}{h} (n_x + n_y) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Beim Differenzieren von A_i nach den einzelnen Schnittkräften berücksichtigen wir, daß nach (23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial M_x} &= \frac{\sin^2 \delta}{J}, \quad \frac{\partial m_y}{\partial M_x} = \frac{\cos^2 \delta}{J}, \quad \frac{\partial m_{xy}}{\partial M_x} = -\frac{\sin \delta \cos \delta}{J}, \\ \frac{\partial m_x}{\partial M_y} &= \frac{\cos^2 \delta}{J}, \quad \frac{\partial m_y}{\partial M_y} = \frac{\sin^2 \delta}{J}, \quad \frac{\partial m_{xy}}{\partial M_y} = \frac{\sin \delta \cos \delta}{J}, \\ \frac{\partial m_x}{\partial M_{xy}} &= \frac{\cos \delta}{J}, \quad \frac{\partial m_y}{\partial M_{xy}} = -\frac{\cos \delta}{J}, \quad \frac{\partial m_{xy}}{\partial M_{xy}} = \frac{\sin \delta}{J}, \\ \frac{\partial n_x}{\partial N_x} &= \frac{1}{h \sin \delta}, \\ \frac{\partial n_x}{\partial N_{xy}} &= \frac{2 \cos \delta}{h \sin \delta}, \quad \frac{\partial n_{xy}}{\partial N_{xy}} = \frac{1}{h}, \\ \frac{\partial n_x}{\partial N_y} &= \frac{\cos^2 \delta}{h \sin \delta}, \quad \frac{\partial n_y}{\partial N_y} = \frac{\sin \delta}{h}, \quad \frac{\partial n_{xy}}{\partial N_y} = \frac{\cos \delta}{h}. \end{aligned}$$

Alle anderen Ableitungen verschwinden. Demnach wird:

$$\frac{\partial A_i}{\partial M_x} = \frac{dx dy \sin \delta}{E \cos \alpha \cos \beta} \left\{ \sin^2 \delta \left(m_x - \mu m_y - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) + \cos^2 \delta \left(m_y - \mu m_x - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) - 2 \sin \delta \cos \delta (1 + \mu) m_{xy} + \rho \left[\sin^2 \delta \left(n_x - \mu n_y - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + \cos^2 \delta \left(n_y - \mu n_x - \frac{1}{2} \alpha E t \right) - 2 \sin \delta \cos \delta (1 + \mu) n_{xy} \right] \right\},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial M_y} = \frac{dx dy \sin \delta}{E \cos \alpha \cos \beta} \left\{ \cos^2 \delta \left(m_x - \mu m_y - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) + \sin^2 \delta \left(m_y - \mu m_x - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) + 2 \sin \delta \cos \delta (1 + \mu) m_{xy} + \rho \left[\cos^2 \delta \left(n_x - \mu n_y - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + \sin^2 \delta \left(n_y - \mu n_x - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + 2 \sin \delta \cos \delta (1 + \mu) n_{xy} \right] \right\},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} = \frac{dx dy \sin \delta}{E \cos \alpha \cos \beta} \left\{ \cos \delta \left(m_x - \mu m_y - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) - \cos \delta \left(m_y - \mu m_x - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) + 2 \sin \delta (1 + \mu) m_{xy} + \rho \left[\cos \delta \left(n_x - \mu n_y - \frac{1}{2} \alpha E t \right) - \cos \delta \left(n_y - \mu n_x - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + 2 \sin \delta (1 + \mu) n_{xy} \right] \right\},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial N_x} = \frac{dx dy \sin \delta}{E \cos \alpha \cos \beta} \left\{ \frac{1}{\sin \delta} \left(n_x - \mu n_y - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + \frac{J \rho}{h \sin \delta} \left(m_x - \mu m_y - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) \right\},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial N_y} = \frac{dx dy \sin \delta}{E \cos \alpha \cos \beta} \left\{ \frac{1}{\sin \delta} \left(n_y - \mu n_x - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + \frac{J \rho}{h \sin \delta} \left(m_y - \mu m_x - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) + 2 (1 + \mu) \cos \delta n_{xy} + \sin \delta \left(n_y - \mu n_x - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + \frac{J \rho}{h} \left[\frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta} \left(m_x - \mu m_y - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) + 2 (1 + \mu) \cos \delta m_{xy} + \sin \delta \left(m_y - \mu m_x - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) \right] \right\},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} = \frac{dx dy \sin \delta}{E \cos \alpha \cos \beta} \left\{ \frac{2 \cos \delta}{\sin \delta} \left(n_x - \mu n_y - \frac{1}{2} \alpha E t \right) + 2 (1 + \mu) n_{xy} + \frac{J \rho}{h} \left[\frac{2 \cos \delta}{\sin \delta} \left(m_x - \mu m_y - \alpha E \frac{\Delta t}{2h} \right) + 2 (1 + \mu) m_{xy} \right] \right\}.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ist nicht schwierig aber sehr umständlich. Es wird

$$\text{mit } c = \frac{E h \cos \alpha \cos \beta}{(h - J \rho^2) (1 - \mu^2) \sin^3 \delta} \quad (27)$$

$$m_x = -\frac{c \sin \delta}{dx dy} \left\{ \rho \sin^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} + \mu \rho \left(\frac{\partial A_i}{\partial N_y} + \cos^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} - \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \right) - \sin \delta \left[\frac{\partial A_i}{\partial M_x} + \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial M_y} - \mu \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} \right] + \frac{\alpha E \Delta t}{2h(1 - \mu)} \right\}, \quad (28a)$$

$$m_y = -\frac{c \sin \delta}{dx dy} \left\{ \rho \mu \sin^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} + \rho \left(\frac{\partial A_i}{\partial N_y} + \cos^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} - \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \right) - \sin \delta \left[\mu \frac{\partial A_i}{\partial M_x} + \mu \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} + \frac{\partial A_i}{\partial M_y} - \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} \right] + \frac{\alpha E \Delta t}{2h(1 - \mu)} \right\}, \quad (1)$$

$$m_{xy} = -\frac{c(1 - \mu) \sin \delta}{2 dx dy} \left\{ \rho \sin \delta \left(\frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} - 2 \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} \right) + \cos \delta \left(\frac{\partial A_i}{\partial M_x} - \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right) - (1 - 2 \cos^2 \delta) \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} \right\}, \quad (2)$$

$$n_x = \frac{c \sin \delta}{dx dy} \left\{ \sin^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} + \mu \left(\frac{\partial A_i}{\partial N_y} + \cos^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} - \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \right) - \sin \delta \frac{J \rho}{h} \left[\frac{\partial A_i}{\partial M_x} + \cos \delta (1 - \mu) \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right] + \frac{\alpha E t}{2(1 - \mu)} \right\}, \quad (3)$$

$$n_y = \frac{c \sin \delta}{dx dy} \left\{ \mu \sin^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} + \frac{\partial A_i}{\partial N_y} + \cos^2 \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} - \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} - \sin \delta \frac{J \rho}{h} \left[\mu \frac{\partial A_i}{\partial M_x} - \cos \delta (1 - \mu) \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} + \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right] + \frac{\alpha E t}{2(1 - \mu)} \right\}, \quad (4)$$

$$n_{xy} = \frac{c(1 - \mu) \sin \delta}{2 dx dy} \left\{ \sin \delta \left(\frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} - 2 \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} \right) + \frac{J \rho}{h} \left[\cos \delta \left(\frac{\partial A_i}{\partial M_x} - \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right) - (1 - 2 \cos^2 \delta) \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} \right] \right\}. \quad (5)$$

Löst man (23) nach N und M auf, so erhält man:

$$M_x = \frac{J}{\sin \delta} (\sin \delta m_x - \cos \delta m_{xy}),$$

$$M_y = \frac{J}{\sin \delta} (\sin \delta m_y + \cos \delta m_{xy}),$$

$$M_{xy} = \frac{J}{\sin \delta} [\sin \delta \cos \delta (m_x - m_y) + (1 - 2 \cos^2 \delta) m_{xy}],$$

$$N_x = \frac{h}{\sin \delta} (\sin^2 \delta n_x + \cos^2 \delta n_y - 2 \sin \delta \cos \delta n_{xy}),$$

$$N_y = \frac{h}{\sin \delta} n_y,$$

$$N_{xy} = \frac{h}{\sin \delta} (\sin \delta n_{xy} - \cos \delta n_y).$$

Hieraus wird unter Verwendung von (28):

$$M_x = -\frac{cJ}{dx dy} \left\{ \rho \sin \delta \left[\frac{\partial A_i}{\partial N_x} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial N_y} - \frac{1}{2} (1 + \mu) \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \right] - \left[1 - \frac{1}{2} (1 + \mu) \cos^2 \delta \right] \frac{\partial A_i}{\partial M_x} - \left[\mu - \frac{1}{2} (1 + \mu) \cos^2 \delta \right] \frac{\partial A_i}{\partial M_y} - \frac{1}{2} (1 - \mu) \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} \right\} + \frac{\alpha E J \Delta t}{2h(1 - \mu)}, \quad (2)$$

$$M_y = -\frac{cJ}{dx dy} \left\{ \rho \sin \delta \left[\frac{\partial A_i}{\partial N_y} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial N_x} - \frac{1}{2} (1 + \mu) \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \right] - \left[\mu - \frac{1}{2} (1 + \mu) \cos^2 \delta \right] \frac{\partial A_i}{\partial M_x} - \left[1 - \frac{1}{2} (1 + \mu) \cos^2 \delta \right] \frac{\partial A_i}{\partial M_y} + \frac{1}{2} (1 - \mu) \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} \right\} + \frac{\alpha E J \Delta t}{2h(1 - \mu)}, \quad (2)$$

$$M_{xy} = -\frac{cJ}{dx dy} (1 - \mu) \left\{ \rho \sin \delta \left(\frac{1}{2} \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} - \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial N_x} \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} + \cos \delta \left(\frac{\partial A_i}{\partial M_x} - \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right) \right] \right\}, \quad (2)$$

$$N_x = \frac{ch}{dx dy} \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial N_x} + \frac{\partial A_i}{\partial N_y} \left[\mu + (1 - \mu) \cos^2 \delta \right] - \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \cos \delta - \sin \delta \frac{J \rho}{h} \left[\frac{\partial A_i}{\partial M_x} + \mu \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right] + \frac{\alpha E h t}{2(1 - \mu) \sin \delta} \right\}, \quad (2)$$

$$= \frac{ch}{dx dy} \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial N_y} + \frac{\partial A_i}{\partial N_x} [\mu + (1-\mu) \cos^2 \delta] - \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \cos \delta \right. \\ \left. - \sin \delta \frac{J \varrho}{h} \left[\mu \frac{\partial A_i}{\partial M_x} - (1-\mu) \cos \delta \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} + \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right] \right\} \\ + \frac{\alpha E h t}{2(1-\mu) \sin \delta}, \quad (29e)$$

$$= \frac{ch}{dx dy} \left\{ -\cos \delta \left(\frac{\partial A_i}{\partial N_x} + \frac{\partial A_i}{\partial N_y} \right) + \left(1 - \frac{1+\mu}{2} \sin^2 \delta \right) \frac{\partial A_i}{\partial N_{xy}} \right. \\ \left. + \sin \delta \frac{J \varrho}{h} \left[\frac{1}{2} (1+\mu) \cos \delta \left(\frac{\partial A_i}{\partial M_x} + \frac{\partial A_i}{\partial M_y} \right) - \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{\partial A_i}{\partial M_{xy}} \right] \right\} \\ + \frac{\alpha E h t \cos \delta}{2(1-\mu) \sin \delta}. \quad (29f)$$

Die Schnittkraft-Verschiebungsgleichungen

Nach dem Prinzip vom Minimum der Formänderungsarbeit müssen statisch unbestimmten Größen — das sind hier die Schnittkräfte — gewählt werden, daß

$$A_i - A_a = \text{Minimum.}$$

Für alle N und M gilt also

$$\frac{\partial A_i}{\partial N} - \frac{\partial A_a}{\partial N} = \frac{\partial A_i}{\partial M} - \frac{\partial A_a}{\partial M} = 0. \quad (30)$$

Setzt man (13) und (30) in (29) ein, so erhält man die Schnittkraft-Verschiebungsgleichungen:

$$= \frac{\alpha E J \Delta t}{2h(1-\mu)} \\ + c J \varrho \sin \delta \left\{ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha) + \mu \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1+\mu) \cos \delta (\bar{u}' + \bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right\} \\ - c J \left\{ \left[1 - \frac{1}{2} (1+\mu) \cos^2 \delta \right] (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. - \left[\mu - \frac{1}{2} (1+\mu) \cos^2 \delta \right] (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1-\mu) \cos \delta \left[\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right] \right\} \quad (31a)$$

$$= \frac{\alpha E J \Delta t}{2h(1-\mu)} \\ + c J \varrho \sin \delta \left\{ \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) + \mu \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1+\mu) \cos \delta (\bar{u}' + \bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right\} \\ + c J \left\{ \left[1 - \frac{1}{2} (1+\mu) \cos^2 \delta \right] (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right. \\ \left. - \left[\mu - \frac{1}{2} (1+\mu) \cos^2 \delta \right] (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (1-\mu) \cos \delta \left[\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right] \right\} \quad (31b)$$

$$= c J (1-\mu) \varrho \sin \delta \left\{ \frac{1}{2} (\bar{u}' + \bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. - \cos \delta \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha) \right\} \\ - \frac{1}{2} c J (1-\mu) \left\{ \cos \delta (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta + \omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right. \\ \left. + (1-2 \cos^2 \delta) \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right\}. \quad (31c)$$

$$N_x = \frac{\alpha E h t}{2(1-\mu) \sin \delta} \\ - ch \left\{ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha) - \cos \delta (\bar{u}' + \bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. + \left[\mu + (1-\mu) \cos^2 \delta \right] \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right\} \\ + c J \varrho \sin \delta \left\{ \omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta - \mu (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right. \\ \left. - (1-\mu) \cos \delta \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right\}, \quad (31d)$$

$$N_y = \frac{\alpha E h t}{2(1-\mu) \sin \delta} \\ - ch \left\{ \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) - \cos \delta (\bar{u}' + \bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. + \left[\mu + (1-\mu) \cos^2 \delta \right] \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha) \right\} \\ - c J \varrho \sin \delta \left\{ \omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha - \mu (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. - (1-\mu) \cos \delta \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right\}, \quad (31e)$$

$$N_{xy} = -\frac{\alpha E h t \cos \delta}{2(1-\mu) \sin \delta} \\ + ch \left\{ \cos \delta \left[\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\bar{u}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha) + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right] \right. \\ \left. - \left[1 - \frac{1}{2} (1+\mu) \sin^2 \delta \right] (\bar{u}' - \bar{v}' - \bar{w}' \operatorname{tg} \alpha - \bar{w}' \operatorname{tg} \beta) \right\} \\ + c J \varrho \sin \delta \left\{ \frac{1}{2} (1+\mu) \cos \delta (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha - \omega_{y'} + \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1-\mu) \left[\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} (\omega_{y'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \beta) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} (\omega_{x'} - \omega_{z'} \operatorname{tg} \alpha) \right] \right\}. \quad (31d)$$

In diesen Gleichungen sind verwendet

- α und β nach (1)
- $\cos \delta$ nach (2)
- ε nach (6)
- ω nach (16)
- ϱ nach (21)
- c nach (27)

Damit ist die Aufgabe grundsätzlich gelöst.

Es kann aber gelegentlich von Vorteil sein, wenn man statt der orthogonalen Verschiebungen $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ die tangentialen und normalen Verschiebungen u , v , w , die in Bild 2 erläutert sind, verwendet.

Es ist (ohne Beweis):

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{w}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha + u \cos \alpha, & (a) \\ \bar{v} &= \frac{w}{\varepsilon} \operatorname{tg} \beta + v \cos \beta, & (b) \\ \bar{w} &= \frac{w}{\varepsilon} - u \sin \alpha - v \sin \beta, & (c) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

[ε nach (6)].

Ersetzen wir die orthogonalen Belastungen $\bar{X}$, $\bar{Y}$ und $\bar{Z}$ durch die tangentialen und normalen Belastungen X , Y und Z nach Bild 2, so ist umzurechnen nach

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta \bar{X} &= \frac{Z}{\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha + X \cos \alpha, & (a) \\ \cos \alpha \cos \beta \bar{Y} &= \frac{Z}{\varepsilon} \operatorname{tg} \beta + Y \cos \beta, & (b) \\ \cos \alpha \cos \beta \bar{Z} &= \frac{Z}{\varepsilon} - X \sin \alpha - Y \sin \beta. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Die Belastungen X , Y und Z sind dabei auf die wahre Größe der Schalenfläche bezogen.

E. Anwendungen

Erstes Beispiel: Die Platten und Scheiben

Platten und Scheiben stellen den einfachsten Fall der Schalen dar. Es ist $z = \text{const}$ und damit nach (1), (2), (6), (16), (21), (27) und (32)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \beta = \alpha = \beta = 0, \\ \cos \alpha &= \cos \beta = 1, \\ \cos \delta &= 0, \quad \delta = \pi/2, \\ \sin \delta &= \varepsilon = 1, \\ \varrho &= 0, \\ c &= E/(1-\mu^2), \\ \bar{u} &= u, \quad \bar{v} = v, \quad \bar{w} = w, \\ \omega_x &= -w', \quad \omega_y = w', \quad \omega_z = 0. \end{aligned}$$

Hiermit erhält man aus (31) für $t = \Delta t = 0$ die Schnittkraft-Verschiebungsgleichungen:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{EJ}{1-\mu^2}(w'' + \mu w''), & (a) \\ M_y &= -\frac{EJ}{1-\mu^2}(w'' + \mu w''), & (b) \\ M_{xy} &= -\frac{EJ}{1-\mu^2}(1-\mu)w'', & (c) \\ N_x &= -\frac{Eh}{1-\mu^2}(u' + \mu v'), & (d) \\ N_y &= -\frac{Eh}{1-\mu^2}(v' + \mu u'), & (e) \\ N_{xy} &= -\frac{Eh}{2(1+\mu)}(u' + v'). & (f) \end{aligned} \quad (34)$$

Aus (5) folgt, daß $N_{yx} = N_{xy}$ und $M_{yx} = M_{xy}$.

Aus (18) ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} Q_x &= -(M_x' + M_{xy}'), & (a) \\ Q_y &= -(M_y' + M_{xy}'), & (b) \\ X &= N_{xy}' + N_x', & (c) \\ Y &= N_{xy}' + N_y', & (d) \\ Z &= Q_x' + Q_y' = \frac{EJ}{1-\mu^2}(w'''' + 2w'''' + w'''''). & (e) \end{aligned} \quad (35)$$

Diese Gleichungen sind allgemein bekannt.

Zweites Beispiel: Die Kreiszylinderschale

Für eine zylindrische Tonne mit dem Radius r , deren First mit der x -Achse zusammenfällt (Bild 6), ist

$$z = r - \sqrt{r^2 - y^2}.$$

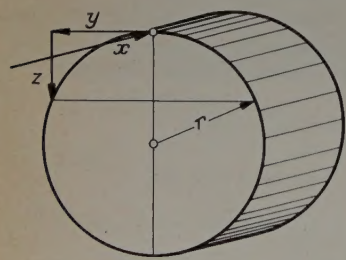


Bild 6

Nach (1) wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= -z' = -y/\sqrt{r^2 - y^2}; \\ \sin \beta &= -y/r. \end{aligned}$$

Wenn wir wie üblich vom x - y -System auf ein x - β -System übergehen (i. a. φ statt β), setzen wir

$$y = -r \sin \beta.$$

Dann ist

$$\frac{dy}{d\beta} = -r \cos \beta; \quad \frac{d\beta}{dy} = \beta' = -\frac{1}{r \cos \beta}.$$

Dementsprechend wird

$$F' = \frac{\partial F(x, \beta)}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial \beta} \cdot \frac{1}{r \cos \beta}.$$

Wegen der Einheitlichkeit der Schreibweise setzen wir dann auch

$$F' = \frac{\partial F(x, \beta)}{\partial x}.$$

Mit

$$z = r(1 - \cos \beta)$$

ist dann, da β von x unabhängig ist, nach (1), (2), (6), (32), (33),

(16), (21) und (27)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \alpha = \sin \alpha = 0, \quad \cos \alpha = 1, \\ \cos \delta &= 0, \quad \sin \delta = 1, \\ \varepsilon &= 1/\cos \beta, \end{aligned}$$

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = w \sin \beta + v \cos \beta, \quad \bar{w} = w \cos \beta - v \sin \beta,$$

$$\bar{X} = X/\cos \beta,$$

$$\bar{Y} = Z \operatorname{tg} \beta + Y,$$

$$\bar{Z} = Z - Y \operatorname{tg} \beta,$$

$$\bar{u}' = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \bar{v}' = \sin \beta \frac{\partial w}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \bar{w}' = \cos \beta \frac{\partial w}{\partial x} - \sin \beta \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\bar{u}'' = -\frac{1}{r \cos \beta} \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$\bar{v}'' = -\frac{1}{r \cos \beta} \left(\cos \beta \cdot w + \sin \beta \frac{\partial w}{\partial \beta} - \sin \beta \cdot v + \cos \beta \frac{\partial v}{\partial \beta} \right),$$

$$\bar{w}'' = -\frac{1}{r \cos \beta} \left(-\sin \beta \cdot w + \cos \beta \frac{\partial w}{\partial \beta} - \cos \beta \cdot v - \sin \beta \frac{\partial v}{\partial \beta} \right),$$

$$\omega_y = \cos \beta \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\omega_x = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} - v \right),$$

$$\omega_z = -\sin \beta \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\varrho = \frac{1}{r},$$

$$c = \frac{E \cos \beta}{(1-\mu^2)(1-J/hr^2)}.$$

Hiermit liefert (31) für $t = \Delta t = 0$ die Spannungs-Verschiebungsgleichungen:

$$\text{mit } K = \frac{EJ}{(1-\mu^2)(1-J/hr^2)}, \quad D = \frac{Eh}{(1-\mu^2)(1-J/hr^2)}, \quad (36)$$

$$M_x = -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (37)$$

$$M_y = -K \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad (38)$$

$$M_{xy} = K(1-\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right), \quad (39)$$

$$N_x = -D \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\mu}{r} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \right] + K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\mu}{r^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) \right], \quad (40)$$

$$N_y = D \left[\frac{1}{r} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) - \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + K \left[\frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right], \quad (41)$$

$$N_{xy} = D \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - K(1-\mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \beta} - \frac{1}{2r} \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (42)$$

Nach (5) ist mit $\cos \delta = 0$

$$M_{yx} = M_{xy} \text{ und } N_{yx} = N_{xy}.$$

Aus (18) folgen die Gleichgewichtsbedingungen:

$$M_{yx} = r(N_{xy} - N_{yx}), \quad (a)$$

$$Q_x = \frac{1}{r} \frac{\partial M_{yx}}{\partial \beta} - \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad (b)$$

$$Q_y = \frac{1}{r} \frac{\partial M_y}{\partial \beta} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \quad (c)$$

$$X = \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_{xy}}{\partial \beta}, \quad (d)$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial N_y}{\partial \beta} - \frac{1}{r} Q_y, \\ Z &= \frac{1}{r} N_y + \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial Q_y}{\partial \beta}. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(e)} \\ \text{(f)} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{noch} \\ (38) \end{array} \right\}$$

gleichen wir das Ergebnis mit dem von Flügge [2], so müssen zunächst bedenken, daß

$Y, w, v, M_{xy}, M_{yx}, N_x, N_y$ und Q_x

gegengesetzte Vorzeichen haben wie dort. Bei Berücksichtigung der Tatsache stellen wir fest, daß (38) identisch ist mit den Flügge'schen Gleichungen. In (36) und (37) dagegen finden wir einige Besonderheiten, die auf die eingangs erwähnten Vereinfachungen und 2. zurückzuführen sind. Sie sind jedoch nur in den außerordentlich kleinen Nebeneinflüssen vorhanden, die man ohne er-

wähnenswerten Fehler beim praktischen Rechnen ohnehin vernachlässigt.

Der Berechnung von Spannungen aus den Schnittkräften legt man im allgemeinen die Vereinfachungen von A. 1. und 2. zugrunde. Deshalb ist es sogar um einen Grad folgerichtiger — selbst bei genauerem Rechnen — die Schnittkräfte auf der Basis dieser Vereinfachungen zu entwickeln. Im übrigen sei nebenbei bemerkt, daß im Stahlbetonbau weder unsere noch die Flügge'sche Annahme über die Spannungsverteilung irgendeine Ähnlichkeit mit der Wirklichkeit hat.

Schrifttum:

- [1] Shizuo Ban, Formänderungen der hyperbolischen Paraboloidschale, Abhandlungen IVBH 1953.
- [2] Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934, Springer-Verlag.
- [3] Girkmann, Flächentragwerke, Wien 1954, Springer-Verlag.
- [4] Fuchssteiner, Kreiszyklinderschalen. Die elementare Behandlung der Kämpferstörungen, B. u. St. 1955, Heft 5.

Baustahlgewebe, Überblick über seine Entwicklung

Von Dr.-Ing. habil. Walter Ernst, Düsseldorf

DK 691.875 Bewehrungsgewebe

Übersicht über die bisherige Entwicklung

Im Jahre 1929 führte die Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. die punktgeschweißten Bewehrungsmatten in Deutschland ein und bezeichnete sie für Deutschland neue Bewehrungsart mit „Baustahlgewebe“ [1]. Zu Beginn des letzten Krieges wurden neben dem Inland auch die überseeischen Länder und vor allem das europäische Ausland (Baustahlgewebe¹) beliefert. Während des Krieges ging der europäische Markt verloren und konnte nur zum Teil und unter schwierigen Verhältnissen wieder zurückgewonnen werden, da einige der inzwischen selbst die Herstellung von punktgeschweißten Bewehrungsmatten aufgenommen haben und die Stahlknappheit der Kriegsjahre einer Ausfuhr dieses für den Wiederaufbau so wichtigen Baustoffes nicht förderlich war. Seit einigen Jahren stellen in Deutschland neben der Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. auch noch einige andere Firmen punktgeschweißte Bewehrungsmatten her.

Die punktgeschweißten Bewehrungsmatten waren bereits in Amerika und England bekannt. Dort wurden sie vor allem wegen der mit ihnen erzielbaren Lohnersparnis für die Bewehrung von flächigen Betonplatten (Betonstraßen, Rollfelder, Hofbefestigungen usw.) verwendet, bei denen ein statischer Nachweis nicht erforderlich ist und ein schnelles Verlegen der Bewehrung die Herstellungskosten erheblich senkt; denn von jeher sind in Amerika Lohnkosten im Vergleich zu den Baustoffen hoch.

Aus dem gleichen Grunde trat und tritt dort auch im Bauwesen Stahlersparnis gegenüber der Lohnersparnis in den Hintergrund. Hier ist es verständlich, daß man in Amerika für punktgeschweißte Bewehrungsmatten einen Stahl mit verhältnismäßig niedriger Streckgrenze (etwa 4000 kg/cm²) verwendet.

Im konstruktiven Ingenieurbau wurden die punktgeschweißten Bewehrungsmatten in Amerika seltener verwendet und auch nur dann, wenn sich dadurch eine fühlbare Lohnersparnis ergibt. Beliebte ist die „Girlandenbewehrung“ für durchlaufende einachsige Platten (Bild 1). Hierbei verwendet man gerollte Matten, die auf der Schaft aufgerollt und an den Mittelstützen hochgehoben werden, so daß eine girlandenartige Bewehrung entsteht, eine Bewehrungsart,



Bild 1. Girlanden - Bewehrung

bei uns nicht ohne weiteres erlaubt ist. Die Stützweiten sind mit etwa 3,50 m begrenzt.

Anders lagen und liegen die Verhältnisse in Deutschland. Hier sind schon immer Baustoffe und Löhne gleichwertige Unkostenposten im Bauwesen. Bei der Einführung der vorgefertigten punktgeschweißten Bewehrungsmatten mußte also der Anreiz für die deutsche Bauwirtschaft sowohl durch eine Lohnersparnis als auch durch eine Stahlersparnis gegeben werden.

Die Einsparung an Lohnstunden war durch die amerikanische Er-

fahrung erwiesen. Die Möglichkeit, auch Stahl einzusparen, indem dieser wesentlich höher als bisher üblich ausgenutzt wurde, hat Schütte [2] durch seine Versuche bewiesen. Bei diesen Versuchen an Stahlbetonplatten wurden eine Stabbewehrung aus Handelsstahl (dem heutigen Betonstahl I entsprechend) und eine Mattenbewehrung aus gezogenen Stahldrähten mit einer Streckgrenze von 5500 kg/cm² miteinander verglichen. Die Matten hatten keine Endhaken. Bei gleichem Stahlquerschnitt verhielten sich die Bruchlasten etwa wie 1:2. Die hohe Festigkeit des gezogenen Stahl- drahtes konnte demnach also weitgehend ausgenutzt werden. Bei einer Mindeststreckgrenze von 5000 kg/cm² und dem üblichen Sicherheitsfaktor $\gamma = 2$ schien eine zulässige Stahlbeanspruchung von etwa 2500 kg/cm² vertretbar.

Aber auch ein zweites Kriterium, das mit der Einführung eines hochwertigen Betonstahles an eine Stahlbetonkonstruktion gestellt werden muß, wurde erfüllt: die Rißbreite blieb klein. Die Versuche zeigten, daß bei den mattenbewehrten Platten mehrere Risse mit entsprechend kleinen Rißbreiten auftraten, während bei den Platten mit der Stabbewehrung sich jeweils nur ein klaffender Riß einstellte. Wie gerade in den letzten Jahren an verschiedenen Stellen immer wieder hervorgehoben wurde [3], [4], kommt es bei hohen Nutzsparnungen, bei denen Risse im Beton unvermeidlich sind, besonders darauf an, daß die Rißbreiten klein bleiben. Dies ist aber nur möglich, wenn es gelingt, möglichst viele und damit feine Risse im Beton zu erzwingen. Durch die vielen angeschweißten Querstäbe der Matten wird die Bewehrung in kurzen Abständen in der Stahlbetonplatte verankert und dadurch das gewünschte Rißbild im Beton erhalten.

Damit waren die Voraussetzungen für einen wirtschaftlichen Erfolg dieser für Deutschland neuen, von Schütte vorgeschlagenen Bewehrungsart erwiesen. Die führenden Drahtwerke in Deutschland prüften die damit aufgeworfenen Fragen und gründeten hierzu die Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. zu Düsseldorf, die zunächst als Studiengesellschaft, kurz darauf als Hersteller in Erscheinung trat.

Der Weg bis zur Anerkennung seitens der deutschen Zulassungsbehörden war jedoch noch sehr dornenvoll. Die beantragte zulässige Stahlspannung von 2500 kg/cm² hielten die namhaften Fachleute für zu weitgehend. Diese ablehnende Haltung war an sich verständlich, da man bisher nur sehr zögernd die zulässige Stahlspannung erhöht hatte. Im Anfang des Stahlbetonbaues — also vor rund 100 Jahren — betrug sie nur 800 kg/cm², wurde dann auf 1000, 1100 und im Jahre 1916 wegen der kriegsbedingten Stahleinsparung auf 1200 kg/cm² heraufgesetzt. Der beantragte große Sprung von 1200 kg/cm² auf 2500 kg/cm² war ungewöhnlich, und das damit verbundene Risiko erschien zu groß. Erst langwierige, über fast 3 Jahre sich erstreckende Versuche an mehreren staatlichen Materialprüfungsanstalten überzeugten von der Vertretbarkeit dieses Vorschlages. Am 5. 7. 1932 wurde schließlich der Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. erstmals die amtliche Zulassung für die punktgeschweißte Bewehrungsmatte „Baustahlgewebe“ mit einer zulässigen Stahlspannung von 2400 kg/cm² erteilt [1]. Inzwischen wurde am 3. 7. 1951

¹ „Baustahlgewebe“ ist ein geschützter Warenname (WZ 505 282)

zuerst für „Baustahlgewebe“ die zulässige Stahlspannung punktgeschweißter Bewehrungsmatten in Platten um weitere 200 kg/cm² auf 2600 kg/cm² bei Beton B 225 heraufgesetzt [8; S. 286].

Die Verwendung von geschweißten Bewehrungsmatten hatte naturgemäß von der Stabstahlbewehrung abweichende Regeln zur Folge. Die Einführung dieser Matten mußte daher mit einer umfassenden Unterweisung der in der Praxis stehenden Ingenieure Hand in Hand gehen [5]. Heute ist die Anwendung geschweißter Bewehrungsmatten selbstverständlicher Lehrstoff aller Ingenieurschulen (s. a. [6], [7]).

Die Matten werden nach den Grundsätzen des Stahlbetonbaues verwendet. Die durch ihre Eigenart bedingten Sonderbestimmungen sind in den jeweilig auf den Zulassungsinhaber ausgestellten Zulassungsbescheiden niedergelegt [8; S. 286 bis 288].

2. Das Fertigungsprogramm

Im Laufe der Jahre hat die Praxis an die Bewehrungsmatte immer wieder zwei Forderungen gestellt, entweder „schnell greifbar“ oder „genaue Anpassung an den erforderlichen Stahlquerschnitt und an die vorhandenen Baumaße“. Deshalb entwickelte die Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. die beiden Programme „Baustahlgewebe-Lagermatten“ und „Baustahlgewebe nach Mattenliste“, zu denen in Kürze „Baustahlgewebe-Mattenstreifen“ hinzukommen werden. Daneben werden Sondermatten für die verschiedensten Anwendungsbereiche nach besonderer Vereinbarung hergestellt. Von den Sondermatten ist die Autobahn-Einheitsmatte für Betonfahrbahndecken der Autobahn allgemein bekannt geworden (heute KF-1-Matte genannt).

2.1 „Lagermatten“

Die Lagermatten sind sofort greifbar und immer gleich lang und breit (bei Baustahlgewebe 5,00 bzw. 2,15 m). Sie müssen allerdings auf der Baustelle zum Teil auf die erforderlichen Baumaße zugeschnitten werden. Außerdem verlangt eine gute Anpassung an den erforderlichen Stahlquerschnitt ein ausreichendes Sortiment.

Vor Jahresfrist hat die Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. ihre Lagermatten neu gestaltet und dabei lang anstehende Verbesserungen durchgeführt. An Stelle des bisherigen „normalen Baustahlgewebes“ traten die *Randsparmatten*²⁾ [9], [5, Heft 27]. Bei diesen können die im Überdeckungsbereich liegenden Längsstäbe statisch voll genutzt und gleichzeitig die querlaufenden, zu stoßenden Stäbe vorschrittmäßig verankert werden. Die Einsparung an Stahl durch die Randsparmatte beträgt bei Matten mit rechteckigen Geweben im Mittel 8% und bei solchen mit quadratischen rund 13%. Zur Erzielung dieser verhältnismäßig hohen Stahleinsparung stellt die Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. zwei Arten von Randsparmatten her:

für die größeren Querschnitte Randsparmatten, die im mittleren Bereich Doppelstäbe (je zwei eng aneinander liegende Einzelstäbe) und im Überdeckungsbereich Einfachstäbe haben. Der Querschnitt im Überdeckungsbereich ist also halb so groß wie im übrigen Teil der Matte (Bild 2 und 3 a);

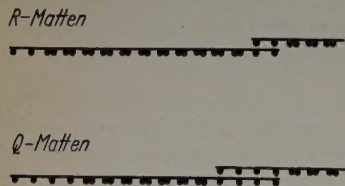


Bild 2. Randsparmatten mit Doppelstäben

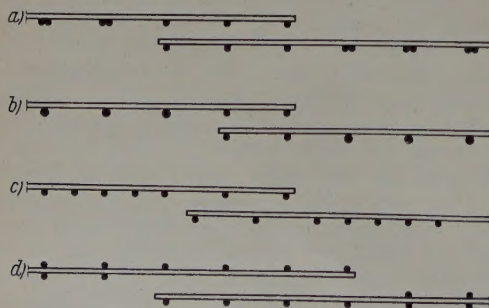


Bild 3. Stoßausbildung der Randsparmatten

- a) mit Doppelstäben
- b) mit unterschiedlichen Stabdurchmessern
- c) mit unterschiedlichen Stababständen
- d) mit Stäben in drei Lagen

²⁾ DBP a vom 30. 8. 54, Erf. Andreas van Schyndel, Neuß.

für die kleineren Querschnitte, bei denen Doppelstäbe gleich Durchmesser wegen der unteren Begrenzung der Stabdurchmesser und des einzuhaltenden Abstandes nicht anwendbar sind, Randsparmatten mit unterschiedlichen Stabdurchmessern, die so aufeinander abgestimmt sind, daß sich die Stahlquerschnitte in und außerhalb Überdeckungsbereiches möglichst wie 1 : 2 verhalten (Bild 3 b).

Die Bilder 3 c und 3 d zeigen weitere Lösungen für stahlsparende Randsparmatten³⁾.

Besonders eingehend wurde geprüft, ob der Doppelstab als „Einheit“ im Sinne der DIN 1045 angesehen werden kann. Der Prüfungsausschuß des Deutschen Ausschusses für Stahlbetonbau diese Frage bejaht. Dabei wurde auch festgestellt, daß sich in der Betonzwickel keine Lunker oder Luftbläschen bilden. Wegen des kleinen Durchmessers ist vielmehr eine vollständige Umhüllung gewährleistet (Bild 4).



Bild 4. Abgelöste Betonüberdeckung einer mit Doppelstäben bewehrten Platte

2.2 „Bewehrungsmatten nach Mattenliste“

Die Matten nach Mattenlisten kommen verlegebereit auf die Baustelle. Hierzu gibt der entwerfende Ingenieur Länge, Breite, Stabdurchmesser und Abstände für die Matten der einzelnen Positionen in einer Liste (Mattenliste) an. Nach dieser Mattenliste werden die Matten bestellt und hergestellt. Die Durchführung solcher Aufträge ist selbstverständlich mit einer gewissen Lieferfrist verbunden [5, Hefte 19 und 23].

2.3 „Baustahlgewebe-Mattenstreifen“

In dem Bestreben, die beiden von der Praxis gestellten Forderungen „sofort greifbar“ und „genaue Anpassung“ möglichst zu vereinen, beabsichtigt die Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. 1,25 m breite Mattenstreifen, mit oder ohne Doppelstäbe im mittleren Bereich

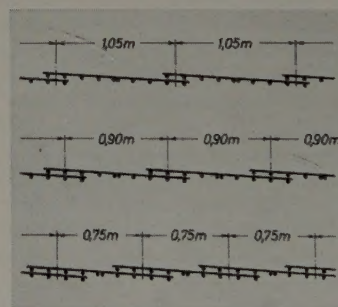


Bild 5. Schematische Darstellung der Veränderlichkeit des Querschnittes einer Bewehrung mit Baustahlgewebe-Mattenstreifen

ab Lager zu liefern, die jeweils mit einer verschiedenen Anzahl von Maschen überdeckt werden (Bild 5). Bei den schmalen Mattenstreifen hat die Bereiche mit doppeltem Querschnitt so geringe Abstände voneinander, daß sie — ähnlich wie bei einer Stabbewehrung mit unterschiedlichen Durchmessern — in der Bewehrungsbreite als gleichmäßig verteilt angenommen werden können. Man kann die Bewehrung mit einem gemittelten Stabquerschnitt bemessen.

Hierdurch erreicht man je nach Anzahl der überdeckten Massen mit einem Mattenstreifen mehrere Stahlquerschnitte f_e , so daß für den üblichen Anwendungsbereich von Bewehrungsmatten nur 4 Streifensorten auskommt. Die Vorhaltung ist also außerordentlich wirtschaftlich.

Da die Mattenstreifen schmal sind, können sie sehr lang gemessen werden, ohne daß ihre Handlichkeit beeinträchtigt wird. Vorgesehene Längen von 10 bis 12 m, so daß sich bei geschickter Ablängung nur geringe Abfälle ergeben.

Die „Baustahlgewebe-Mattenstreifen“ sind also sowohl „sofort greifbar“ als auch „genaue Anpassung“.

³⁾ Die vier Lösungswege gemäß Bild 3 sind in der unter Fußnote ²⁾ angegebenen Patentschrift enthalten.

⁴⁾ DBP a v. 22. 10. 54, Erf. Andreas van Schyndel, Neuß.

„anpassungsfähig“ (wirtschaftliche Lagerhaltung) als auch „anpassungsfähig“ hinsichtlich des Querschnittes und der Mattenlänge. Sie verbinden mit der Anpassungsfähigkeit der Stabstahlbewehrung mit der einfachen Verlegung der Mattenbewehrung.



Bild 6. Bewehrung mit Baustahlgewebe-Mattenstreifen bei einer Versuchsplatte

Die zuständige Bauaufsichtsbehörde hat nach Anhörung des deutschen Ausschusses für Stahlbeton dieser Bewehrungsweise zugestimmt. Ausgenommen wurde zunächst nur die einmaschige Überdeckung bei Nutzlasten über 500 kg/m^2 . Zur Zeit wird in einer atl. Materialprüfungsanstalt untersucht, inwieweit diese Einschränkung aufgehoben werden kann. Diesen amtlichen Stellungnahmen und Untersuchungen sind eigene Untersuchungen und Versuche vorangegangen. Das Bild 6 zeigt eine solche Versuchsplatte im Laboratorium der Bau-Stahlgewebe G.m.b.H. Auf Bild 7 sieht man Mattenstreifen als Bewehrung für eine Wohnhausdecke.

Bedeutung für die Bauwirtschaft

Eine statistische Zahl möge die Bedeutung der punktgeschweißten

Bewehrungsmatten für die Bauwirtschaft beleuchten: Von den in den Jahren 1953 bis 1955 erstellten rd. 1 500 000 Wohnungen erhielten nach vorsichtiger Schätzung etwa 40% Vollbetondecken, die mit den punktgeschweißten Bewehrungsmatten „Baustahlgewebe“ bewehrt wurden.



Bild 7. Bewehrung mit Baustahlgewebe-Mattenstreifen für eine Wohnhausdecke

Schrifttum:

- [1] Das Baustahlgewebe, Abhandlung über seine Verwendung im Beton- und Eisenbetonbau, herausgegeben von der Bau-Stahlgewebe GmbH, Düsseldorf, September 1932.
- [2] Schütte, Bruchversuche an Betonplatten mit neuartiger Armierung aus geschweißtem Stahlgewebe. Das Betonwerk, 1930 Nr. 30.
- [3] Graf, Über die Entwicklung der Eigenschaften der Betonstähle und über die zugehörigen zulässigen Anstrengungen. Die Bauwirtschaft, 1952, Heft 27, 28 und 29.
- [4] Schütte und Ernst, Versuche an Stahlbetonbalken mit Queri-Stahl-Bewehrung. B. u. St., 1952, S. 11 bis 18.
- [5] Baustahlgewebe, Mitteilungen für die Beton- und Stahlbetonbau-Praxis, Hefte 1 bis 29, herausgegeben von der Bau-Stahlgewebe GmbH, Düsseldorf. Ferner u. a.: Baustahlgewebe auf der Baustelle, eine Sammlung praktischer Winke aus 25 jähriger Erfahrung, 1954. Betonstraßenbau mit Baustahlgewebe, 2. Aufl., 1955.
- [6] Betonkalender 1956, Teil I, S. 61...64, Wilh. Ernst & Sohn.
- [7] Zement-Taschenbuch 1956, S. 37...114, Bauverlag.
- [8] Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton. 6. Auflage, Berlin 1955, Wilh. Ernst & Sohn.
- [9] Baustahlgewebe. Der Bauingenieur, 1955, S. 312.

Zur Knickberechnung der Stockwerkrahmen aus Stahlbeton

Von o. Prof. Dr.-Ing. Alfred Habel, Technische Hochschule München

DK 624.072.333 Stockwerkrahmen
624.075.2 Auf Knicken beanspruchte Elemente

Einleitung

Nach DIN 1045 ist die Knicklänge h_k der Säulen gleich der Gesamthöhe anzunehmen, wenn die Rahmenknotenpunkte seitlich unverschieblich festgehalten sind. Sind die Säulenenden gegen seitliches Verschieben jedoch nicht gesichert, so sind entsprechend größere Knicklängen in Rechnung zu stellen. Wie groß diese anzunehmen sind, wird nicht gesagt, weil zur Zeit der Aufstellung der Norm nur einige strenge Lösungen des Rahmenknickproblems bekannt waren, für die praktische Anwendung zu langwierig sind. Inzwischen sind jedoch gebrauchsfertige Näherungsformeln für h_k bekannt geworden, und es wäre somit an der Zeit, sie auch praktisch anzunehmen und in der Vorschrift zu berücksichtigen, wie das in den österreichischen Stahlbeton-Bestimmungen bereits geschehen ist.

Im folgenden bringen wir eine kurze Einführung in das Knickproblem der Rahmen mit waagrecht verschieblichen Ecken, bei der mathematischen Entwicklungen weggelassen werden. Wer sich die schwierige Theorie einarbeiten will, kann das Studium des umfangreichen Schrifttums über diesen Gegenstand ohnehin nicht gehen.

Wir betrachten zunächst den in Bild 1 gezeichneten Zweigelenrahmen, der durch zwei gleiche Lasten P symmetrisch beansprucht wird. Solange P kleiner ist als die kritische Last P_k , bildet sich eine

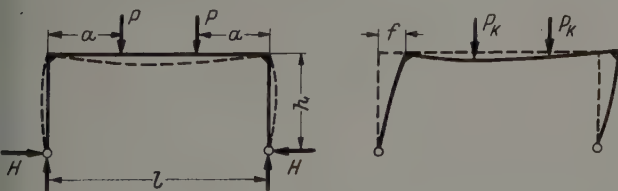


Bild 1

symmetrische Biegelinie aus, die eine stabile Gleichgewichtslage vorliegt. Beim Erreichen von P_k besteht außer der symmetrischen Gleichgewichtsfigur noch eine andere, unmittelbar benachbarte un-

symmetrische Gleichgewichtslage, die durch eine waagerechte Stützenkopfverschiebung f gekennzeichnet ist. Nach dem Überschreiten von P_k nimmt die Eckverschiebung stark zu und der Rahmen knickt in seiner Ebene aus. Da auch bei überkritischen Laststufen die symmetrische Gleichgewichtsfigur den vorgeschriebenen Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen zu genügen vermag, liegt hier ein Stabilitätsproblem mit Gleichgewichtsverzweigung vor, das dadurch gekennzeichnet ist, daß unter P_k sowohl eine symmetrische als auch eine überlagerte unsymmetrische Knickfigur möglich ist. Von dieser Bedingung ausgehend gelang es Chwalla, P_k zu berechnen [1]. Es hat sich dabei gezeigt, daß P_k von der Stellung der Lasten am Riegel, also vom Abstand a , nur sehr wenig abhängt. Chwalla hat daher auch ein durch Versuche [2] bestätigtes Näherungsverfahren angegeben, nach welchem P_k für einen „Ersatzbelastungsfall“ berechnet werden darf, der dadurch zustande kommt, daß die unter der gegebenen symmetrischen Riegelbelastung (die übrigens beliebig sein kann) in den Stäben wirkenden Normalkräfte P und H an den Enden dieser drei Stäbe mittig angreifen (Fall a in Bild 2). Bei nicht zu langem Riegel kann die Ersatzbelastung durch Weglassen von H noch weiter vereinfacht werden (Fall b). Damit ist der sehr schwierige Stabilitätsfall Bild 1 auf den viel einfacheren Fall der sogen. „klassischen Stabilitätstheorie“ zurückgeführt, bei dem in den Stäben vor dem Ausknicken nur Längskräfte und keine Biegemomente auftreten. Die nach diesem Näherungsverfahren ermittelten Knicklasten sind stets etwas größer als sie die strenge Theorie ergibt. Chwalla macht ferner darauf aufmerksam, daß der Unterschied zwischen dem genauen und dem Näherungswert von P_k bei gedungenen Rahmen aus Baustahl

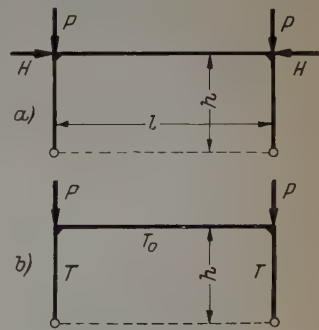


Bild 2

mitunter nicht unbeträchtlich sein kann, weil schon vor Erreichen von P_k als Folge der symmetrischen Ausbiegung des Rahmens örtliche Plastizierungen auftreten, die den Knickwiderstand herabsetzen können, im Ersatzbelastungsfall aber nicht zur Geltung kommen. In einer späteren Arbeit haben Chwalla und Jokisch das Ersatzbelastungsverfahren auch bei Stockwerkrahmen angewendet [3].

Bei der Untersuchung des Ersatzbelastungsfalls dürfen axial undeformbare Stäbe vorausgesetzt werden, was gegenüber der genauen Rechnung mit Berücksichtigung der Stablängenänderungen etwas zu hohe Knicklasten ergibt.

2. Der Einfluß des Kriechens auf die Knicklasten der Rahmen

Wird der in Bild 3 gezeichnete Stab mit der am Hebelarm p wirkenden Druckkraft P dauernd belastet, so tritt unmittelbar nach der Lastaufbringung die waagerechte Stützkopfverschiebung f_0 auf und das Einspannmoment ist $P(p + f_0)$. Durch das Kriechen wird f_0 auf $f^n = f_0(1 + \varphi')$ vergrößert, wobei φ' von der Endkriechzahl φ , dem Bewehrungsgehalt, der Betongüte und der Querschnittsform abhängt. Das Einspannmoment bei Kriechende ist dann $M^n = P(p + f^n)$. Ist die Säule schlank und p klein, so ist f^n von derselben Größenordnung wie p und der die Tragfähigkeit herabsetzende Kriecheinfluß bedeutend. Bei großem Hebelarm p ist jedoch f_0 bzw. f^n gegenüber p so klein, daß die Vergrößerung des Moments $P \cdot p$ durch den kriechbedingten Anteil $P \cdot f^n$ vernachlässigt werden kann.

In letzter Zeit wurde mehrfach die Befürchtung geäußert, daß sich die Kriechdurchbiegungen auch bei den Rahmenstielen unserer Geschossbauten ungünstig auswirken können. Da solche Behauptungen geeignet sind eine gewisse Beunruhigung hervorzurufen, erscheint es notwendig, auf diese Frage etwas näher einzugehen.

Wir haben gesehen, daß der Einfluß der vorkritischen Biegemomente und Verformungen auf die Knicklast nur gering ist und daher mit einem Ersatzbelastungsfall (Bild 2) gerechnet werden darf. Es wird daher auch der Einfluß der von der ständigen Last des Rahmens verursachten Kriechverformungen auf P_k nur klein sein und praktisch vernachlässigt werden dürfen. Das erkennt man auch aus der Betrachtung des Ersatzbelastungsfalls b im Bild 2. Nach Kollbrunner/Meister [4; Tabelle 17, Seite 174] ist P_k beim Zweigelenrahmen vom Verhältnis T/T_0 der Knickmoduli der Stiele und des Riegels abhängig. An anderer Stelle wurde nachgewiesen, daß sich T beim mittig gedrückten Stiel nur wenig ändert, solange die infolge des Betonkriechens wachsende Stahlspannung σ_s im elastischen Bereich bleibt [5]. Es wird sich daher nach Tabelle 17 auch die Knicklänge des Rahmenstiels nur wenig ändern und die Knicklast P_k des Rahmens vom Kriechen nur unwesentlich beeinflusst werden.

Auch bei Rahmen mit unverschieblichen Ecken ist das Kriechen ungefährlich. Es verursacht zwar Spannungsverlagerungen in den einzelnen Querschnitten, aber keine nennenswerte Änderung der mit Berücksichtigung der Bewehrung berechneten statisch unbestimmten Größen. Die unter der kritischen Last auftretenden Biegemomente sind schon an sich so groß, daß die von der Kriechverformung infolge der ständigen Last herrührenden zusätzlichen Momente keine Rolle spielen. Aus demselben Grunde ist es bekanntlich nicht notwendig, Rahmentragwerke nach der Verformungstheorie (Theorie 2. Ordnung) zu berechnen [6].

Während sich das Kriechen bei den schwach ausmittig gedrückten statisch bestimmten Säulen (Bild 3) sehr ungünstig auswirkt, verhalten sich die Rahmenträger viel günstiger; das wird auch durch die bisherige lange Bau erfahrung hinreichend bestätigt. Es besteht mithin keine Veranlassung, das Kriechen bei der statischen Berechnung nicht vorgespannter Stockwerkrahmen zu berücksichtigen oder seinetwegen erhöhte Knick- oder Ausweichzahlen vorzuschreiben.

3. Näherungsformeln für die Knicklänge der Rahmenstielen

Die Knicklast eines nur in den Knotenpunkten lotrecht belasteten Rahmens ist jene Last, unter welcher außer der Rahmenform mit lauter geraden Stäben noch eine Gleichgewichtslage mit unendlich kleinen Ausbiegungen der Stäbe möglich ist, das Gleichgewicht also indifferent wird. Ein Rahmen knickt auch dann aus, wenn in ihm

überhaupt keine Biegemomente, sondern nur Längskräfte in den Stielen auftreten. Da in diesem Fall auch die unter P_k möglichen Momente nur unendlich klein sind, kann nicht davon gesprochen werden, daß wegen einer Abwanderung der Momente aus den Stielen in die Riegel bei den Geschosssäulen überhaupt keine Knickgefahr möglich ist. Bei Rahmen mit nicht festgehaltenen Ecken tritt unter stets eine waagerechte Verschiebung der Stützenköpfe auf (antisymmetrisches Knicken).

Zur Berechnung der Knicklast können verschiedene Verfahren herangezogen werden. Im ausgebogenen Zustand treten in den Stielen querschnitts Momente und Querkkräfte auf, die wir „Knickkräfte“ nennen. Bei Anwendung des Drehwinkelverfahrens [3] hat man jedem einzelnen Rahmenstab die Endmomente durch die Knickdrehwinkel, den Stabdrehwinkel und die im Augenblick des Knickens auftretende Längskraft νN auszudrücken, wobei N Normalkraft unter der Gebrauchslast und ν die Knicksicherheitsbedeutung. Der Einfluß der Plastizität wird durch Einführung des

Knickspannung $\sigma_k = \frac{\nu N}{F}$ zugeordneten Knickmoduls T berücksichtigt.

Dann werden die sogenannten Knickgleichungen aufgestellt, welche die bekannten Gleichgewichtsbedingungen des Drehwinkelverfahrens vorstellen. Der Unterschied gegenüber der gewöhnlichen Rahmenberechnung ist der, daß die Bewerte der Knickgleichungen auch den Einfluß der Längskräfte νN auf die Drehwinkel enthalten und daß in den Gleichungen keine von Unbekannten freie Glieder vorkommen, weil bei der klassischen Stabilitätstheorie vorauszusetzen ist, daß zwischen den Knoten keine Lasten auf die Stiele wirken. Das Gleichungssystem ist daher homogen und besitzt dann eine nichttriviale Lösung, wenn seine Nennerdeterminante verschwindet. Die Gleichung $D_k = 0$ ist mithin die „Knickgleichung“.

Bei Rahmen ist es üblich, zum Vergleich die Knicklänge h_k eines Stiels anzugeben, der an beiden Enden gelenkig gelagert ist, dessen Knickwiderstand genau so groß ist wie der des gegebenen Tragwerks. Kennt man beispielsweise für den in Bild 1 dargestellte

Zweigelenrahmen die Knicklast $P_k = \nu P$, so folgt aus $P_k = \frac{\pi^2 EI}{h_k^2}$

der Wert $h_k = \pi \sqrt{\frac{TJ}{P_k}}$, womit auch $\beta = \frac{h_k}{h}$ bekannt ist.

Das Drehwinkelverfahren ermöglicht zwar eine strenge Lösung aller Fälle der klassischen Stabilitätstheorie, ist aber für die Praxis zu langwierig. Dazu kommt noch die Unsicherheit in der Annahme des Knickmoduls T , der zuerst geschätzt werden muß. Stellt man später heraus, daß zur errechneten Knicklast andere Knickmodulwerte der einzelnen Stäbe gehören, so wäre die Rechnung solange zu wiederholen, bis die Übereinstimmung erreicht ist.

Beim vereinfachten Ersatzbelastungsverfahren wäre bei den belasteten Riegeln an Stelle von T der Elastizitätsmodul E_b des Betons einzuführen. Da die Riegel jedoch infolge der zwischen den Knoten wirkenden Lasten durch Biegemomente beansprucht sind, sollte man eigentlich mit einem für die einzelnen Querschnitte veränderlichen kleineren Wert E_b rechnen, der der jeweils geltenden Beziehung zwischen Moment und Krümmung entspricht. Eine umständliche Rechnung ist praktisch undurchführbar und es bleibt daher wohl nichts anderes übrig, als E_b bzw. T für alle Stäbe konstant anzunehmen und so zu rechnen, wie wenn das Knicken vollkommen im elastischen Bereich stattfinden würde.

Eine Berechnung der Knicklast ist auch nach dem Kraftgrößenverfahren, dem Iterationsverfahren oder nach dem „Durchbiegungsverfahren“ von Sattler möglich [7].

Puwein [8] und Sahmel [9] haben ein einfaches Näherungsverfahren verwendet, dessen Grundgedanke am Beispiel eines Zweigelenrahmens (Bild 4) erläutert werden soll.

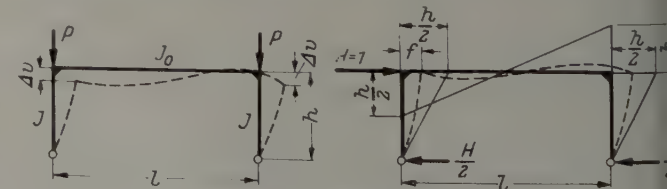


Bild 4

ter der Verzweigungslast P_k ist neben der biegemomentenfreien Gleichgewichtsfigur mit geraden Stäben eine benachbarte Gleichgewichtslage mit unendlich wenig ausgebogenen Stäben möglich, dadurch charakterisiert ist, daß die Stäbe auch Momente und Kräfte aufweisen. Die unter P_k auftretende ausgebogene Knicklast kann durch eine ähnlich verlaufende Verformung ersetzt werden, von einer in Riegelhöhe angreifenden Hilfslast H verursacht wird, in beiden Fällen die gleiche Arbeit geleistet werden muß. Der Angriff $H = 1$ erzeugt die Eckverschiebung f und bei Gleichheit der Verschiebungen f infolge $H = 1$ und P_k lautet der Arbeitsvergleich $2 P_k \Delta v = 1/2 \cdot 1 \cdot f$, wobei Δv die Senkung der Rahmen infolge Biegung und Drehung der Stiele vorstellt. Drückt man Δv durch f aus, so erhält man

$$P_k \mu \frac{f^2}{h} = \frac{f}{2} \quad \text{und daraus} \quad P_k f = \frac{h}{2\mu} = K \quad \text{bzw.} \quad P_k = \frac{K}{f}.$$

Die von der Form der Biegelinie abhängigen Werte K und μ sind für das gegebene Tragwerk nahezu unveränderlich und lassen sich aus einem bekannten Sonderfall ableiten. Beim Rahmen mit steifem Stiel ($J_0 = \infty$) ist $P_k = P_E$ (Eulerlast) und $h_{kE} = 2h$ (Bild 5).

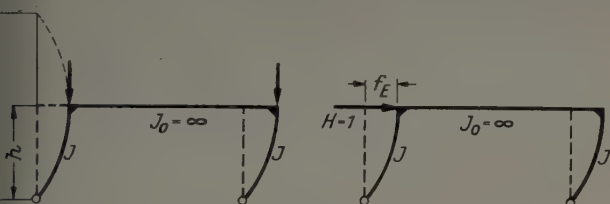


Bild 5

Die waagerechte Eckverschiebung dieses Rahmens für $H = 1$, ist $P_E = \frac{K}{f_E}$ und $K = P_E \cdot f_E$.

mit wird

$$P_k = \frac{K}{f} = P_E \frac{f_E}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{\pi^2 EJ}{h_k^3} = \frac{\pi^2 EJ}{h_{kE}^3} \cdot \frac{f_E}{f} \quad \text{und daraus} \quad h_k = h_{kE} \sqrt{\frac{f}{f_E}}. \quad (1)$$

Wählen J_0 als Vergleichsträgheitsmoment und erhalten die reduzierte Stablänge $h' = h \frac{J_0}{J}$. Dann ist

$$f = \frac{2h'}{3} \cdot \frac{h^2}{4} + \frac{l}{3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{12} (l + 2h') \quad \text{und} \quad EJ_0 f_E = \frac{2h' h^2}{12}.$$

$$\frac{f}{f_E} = 1 + \frac{l}{2h'} \quad \text{folgt} \quad h_k = \beta h = 2h \sqrt{1 + \frac{l}{2h'}} \quad \text{und daraus}$$

$$\beta = 2 \sqrt{1 + \frac{l}{2h'}} = 2 \sqrt{1 + \frac{Jl}{2hJ_0}}. \quad (2)$$

man in Übereinstimmung mit DIN 4114 (Stabilitätsfälle) den Wert $\frac{Jl}{hJ_0} = c$, so ist $\beta = 2 \sqrt{1 + 0,5c}$. Weil die Biegelinie des Hilfsrahmens $H = 1$ mit der infolge P_k nicht völlig übereinstimmt, erhält man nach Puwein einen genaueren Wert β , wenn c mit dem Korrekturfaktor 0,822 multipliziert wird. Dann ist

$$\sqrt{1 + 0,822 \cdot 0,5c} = 2 \sqrt{1 + 0,411c} = 2 \sqrt{1 + 0,411 \frac{Jl}{hJ_0}}. \quad (3)$$

Bei $l = 2h$ und $J = J_0/2$, so wird $c = 1$ und $\beta = 2,37$. Die Rollrechnung nach DIN 4114 liefert mit $m = 1$ und $\alpha = 0$ dasselbe $\beta = \sqrt{4 + 1,4c + 0,02c^2} = 2,33$.

Sahmel [9] hat das Verfahren mit gewissen Vereinfachungen auf Stockwerkrahmen mit eingespannten und gelenkig gelagerten Stielen angewendet und für die Knicklängen der Rahmenstiele geschlossene Formeln angegeben. Sein an mehreren Beispielen vorgenommener Vergleich mit den nach DIN 4114 berechneten Knicklängen zeigt eine befriedigende Übereinstimmung. Weil sich darunter kein mehrfeldriger Stockwerkrahmen befindet, haben wir die beiden in Bild 6 dargestellten Rahmen untersucht, für die

eine strenge Lösung nach dem Drehwinkelverfahren von Chwalla und Jokisch bekannt ist [3].

Die genaue Knicklast des Rahmens in Bild 6a

$$\text{ist} \quad P_k = 8,18 \frac{EJ}{h^2},$$

womit sich für sämtliche Stiele die gleiche Knicklänge

$$h_k = \sqrt{\frac{\pi^2 EJ}{P_k}} = 1,096 h \quad \text{herausstellt.}$$

Mit den Gleichungen von Sahmel ergab sich für die Säulen im Erdgeschoß $h_k = 1,08 h$ und für die oberen Stiele $h_k = 1,10 h$, also praktisch dasselbe wie nach der genauen Theorie.

Für den nach Bild 6b belasteten Rahmen ist der genaue Wert

$$P_k = 7,09 \frac{EJ_0}{h^2} \quad \text{und die für alle Stiele gleiche Knicklänge} \quad h_k = 1,18 h.$$

Nach Sahmel wurde für die unteren Säulen $h_k = 1,29 h$ und für die oberen Säulen $h_k = 1,25 h$ erhalten. Die Näherungswerte sind größer als der genaue Wert 1,18 h und liegen somit auf der sicheren Seite.

Die Formeln von Sahmel gelten für symmetrische Rahmen mit lauter gleichen Stützweiten und höchstens drei Feldern, und es entsteht die Frage, wie man vorgehen soll, wenn die Stützweiten verschieden oder mehr als drei Felder vorhanden sind. Beim Zweigelenkrahmen ist der zur Bestimmung von h_k erforderliche Beiwert

$$\text{aus Gl. (2)} \quad \beta = 2 \sqrt{1 + \frac{Jl}{2hJ_0}} \quad \text{zu berechnen. Einer größeren Riegel-$$

länge l entspricht also bei gleichbleibender Stielhöhe h eine größere Knicklänge und kleinere Knicklast. Man wird daher einen Rahmen mit ungleichen Feldweiten für die Ermittlung der Knicklängen durch einen solchen mit lauter gleichen Feldern ersetzen dürfen, dessen Stützenabstand der größten Feldweite $l_{\max}$ des gegebenen Rahmens entspricht (Bild 7).

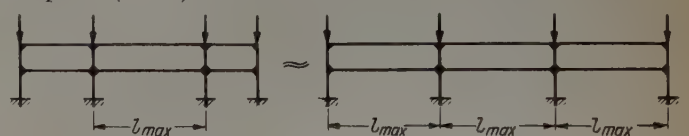


Bild 7

Bild 8 enthält die Werte $\beta = h_k/h$ für 4 verschiedene Rahmen mit wachsender Felderzahl. Mit zunehmender Zahl der Säulen wird β kleiner und der Knickwiderstand der Rahmen größer. Die Abnahme von β ist beim Übergang vom einhöftigen zum zweistieligen Rahmen

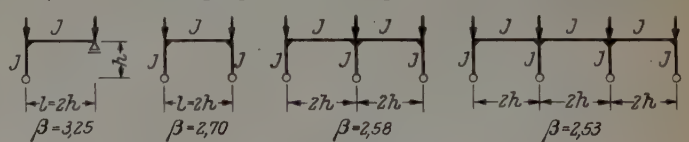


Bild 8

groß und wird dann rasch kleiner. Weil β beim Dreifeldrahmen nur mehr wenig kleiner ist als beim Rahmen mit zwei Öffnungen, wird man mit ausreichender Näherung die von Sahmel für den Dreifeldrahmen aufgestellten Näherungsformeln auch dann verwenden können, wenn das Tragwerk mehr als drei Felder hat.

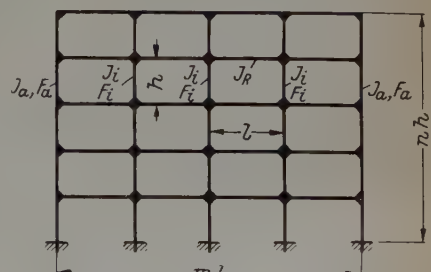


Bild 9

Die Österreichischen Stahlbeton-Bestimmungen [10] enthalten die nachstehenden, auf Arbeiten Puweins zurückgehenden Formeln für Rahmen mit beliebig vielen gleichen Feldern und Geschoßhöhen, fest eingespannten Stiefüßen und seitlich verschieblichen Stützenköpfen (Bild 9):

$$J_s = \frac{1}{m} [2 J_a + (m-1) J_i], \quad F_s = \frac{1}{m} [2 F_a + (m-1) F_i],$$

$$i_s = \sqrt{\frac{J_s}{F_s}}, \quad c = \frac{J_s}{h} \cdot \frac{l}{J_R},$$

$$h_k = h \sqrt{1 + 0,8c + \frac{48}{m^2 + 2} \left(\frac{n i_s}{l} \right)^2}. \quad (4)$$

Bei gleichen Kennwerten J und F in sämtlichen Geschossen ergibt sich daraus für alle Stiele dieselbe Knicklänge. Nach einer Mitteilung von Prof. Jäger, Wien, kann die Gl. (4) auch dann noch angewendet werden, wenn diese Kennwerte in den einzelnen Geschossen verschieden sind und die Geschoßhöhen voneinander etwas abweichen. Man hat dann die Berechnung von h_k mit den jedem einzelnen Geschoß zugeordneten Werten J_a, J_i, J_R (Bild 9) durchzuführen und erhält so in den einzelnen Stockwerken verschiedene Knicklängen h_k .

Weitere Gleichungen für zweistielige Stockwerkrahmen und mehrfeldrige einstöckige Rahmen sind in der DIN 4114, Ri 14. 12 zu finden.

Zum Vergleich sind in der nachstehenden Tafel für die beiden in Bild 6 dargestellten Rahmen die Werte β angeführt, die sich nach der genauen Theorie, nach Sahmel und der Önorm B 4200 ergeben haben.

Rahmen in Bild 6

β	Rahmen a			Rahmen b		
	genau	Sahmel	Önorm	genau	Sahmel	Önorm
Erdgeschoß.....	1,096	1,08	1,14	1,18	1,29	1,43
Obergeschoß.....	1,096	1,10	1,14	1,18	1,25	1,24

Die Unterschiede sind auf einige voneinander abweichende Voraussetzungen zurückzuführen, die bei der Ableitung der Näherungsformeln gemacht wurden. Weitere Vergleichsrechnungen zeigten, daß die Önorm meist erheblich größere β ergibt als die Berechnung nach Sahmel; es wurden Unterschiede bis zu 43% festgestellt.

4. Vorschläge zur vereinfachten Abschätzung der Knicklängen

In den Spannbeton-Erläuterungen [11] werden für Rahmenstiele mit waagrecht verschieblichen Stützenköpfen folgende Werte β vorgeschlagen: bei beiderseitiger Einspannung der Stiele $\beta = 1,5$, bei Einspannung des einen und Gelenklagerung des anderen Stielendes $\beta = 2,0$. Dazu kann nach den bisherigen Erfahrungen folgendes gesagt werden:

4.1 Mehrfeldrige Stockwerkrahmen

Die genannten Zahlen ermöglichen eine brauchbare rohe Abschätzung der Knicklänge unter Vermeidung ganz grober Fehler. Ihre praktische Anwendung erscheint zulässig, sollte aber in der Vorschrift nicht zur Bedingung gemacht werden, weil man, wie schon die Rahmen in Bild 6 beweisen, mit den Formeln von Sahmel oder der Önorm in vielen Fällen wesentlich kleinere Knicklängen erhält und wirtschaftlicher arbeitet.

4.2 Mehrfeldrige eingeschossige Rahmen

Sind die Stiefüße gelenkig gelagert, so sind die β in der Regel viel größer als 2,0 (siehe unser Bild 8 und [9; Beispiel 18] mit Werten bis 2,9). Solche Stiele müssen mit dem Durchschnittswert $\beta = 2,5$ berechnet werden. Bei Rahmen mit fest eingespannten Stiefüßen genügt $\beta = 1,5$.

4.3 Zweistielige Einfeldrahmen mit mehreren Stockwerken

Da es kaum möglich ist, einen für alle Fälle passenden Durchschnittswert β anzugeben, ist es hier besonders ratsam, nach Sahmel zu rechnen. Oft treten auch bei den Säulen der Obergeschosse Werte $\beta > 2,0$ auf [9; Beispiele 10 und 12], in anderen Fällen haben sich dagegen bei allen Stielen Werte $\beta < 1,5$ herausgestellt [9; Beispiele 11 und 13]. Begnügt man sich mit einer bloßen Schätzung, so wird man bei Rahmen mit in die Fundamente fest eingespannten Stiefüßen bei allen Stielen vorsichtshalber mit $\beta = 2,0$, bei Rahmen mit

Fußgelenken im untersten Geschoß mit 2,5 und den oberen Stockwerken mit 2,0 rechnen müssen.

4.4 Einstöckige rechteckige Zweigelenkrahmen

Bei diesen Tragwerken ist die Knicklänge der Stützen stets größer als die doppelte Stielhöhe. Der Wert $\beta = h_k/h$ ist immer aus Gl. (4) zu ermitteln (Bezeichnungen siehe Bild 4).

Bei einstöckigen zweistieligen Rechteckrahmen mit fest eingespannten Füßen genügt wieder $\beta = 1,5$.

5. Ergänzende Bemerkungen

Weil die vorkritischen Verformungen keine nennenswerte Rolle spielen und die Knicklängen der Rahmenstiele für einen Erdbebelastungsfall ermittelt werden, bei dem bis zum Ausknicken keine Biegemomente auftreten, könnte man vielleicht daran denken, Stabilitätsnachweis nur für die mittig gedrückten Säulen zu verlangen und nicht wie in [12] vorgeschlagen, bei ihm auch noch

in Stielmitte auftretende Biegemoment $M = \frac{1}{2} (M_1 + M_2)$ zu berücksichtigen (Bild 10). Die bisherigen Auffassungen gehen jedoch dahin, dieses Moment in den Stabilitätsnachweis einzubeziehen. Das ist auch die Meinung

Jäger [13], der für die Berechnung der h_k die Formeln der Önorm verweist. Nach der Knickvorschrift DIN 4114 sind im Stahlbetonrahmenstiele mit der Gleichung

$$\frac{\omega P}{F} + 0,9 \frac{M}{W} \leq \sigma_{zul}$$

planmäßig auf Druck und Biegung zu bemessen, wobei die Knickzahlen ω den nach der linearen elastischen Stabilitätstheorie ermittelten Knicklängen h_k entsprechen müssen. Ist das Biegemoment in der Stielachse veränderlich, so ist in Gl. (5) der Wert $\max M$ einzusetzen. Nur wenn $\max M$ wie im Bild 10 in einem der beiden Stabenden auftritt und die Knotenpunkte unverschieblich festgehalten sind, darf an Stelle von $\max M$ arithmetische Mittel $M = \frac{1}{2} (M_1 + M_2)$ der beiden Stabendmomente

eingeführt werden. Bei Rahmen mit seitlich verschieblichen Stützenköpfen ist mit dem größten Stabendmoment $\max M$ zu rechnen. Die Stahlbauvorschrift ist mithin noch strenger als unser Berechnungsvorschlag, nach welchem stets mit $\frac{1}{2} (M_1 + M_2)$ gerechnet werden darf.

Für die Berücksichtigung von M sprechen folgende Gründe der Sicherheit:

1. Bei der Ableitung der Näherungsformeln für die Knicklängen der Stiele wurde $E_b = \text{konstant}$ vorausgesetzt und angenommen, daß sich alle Teile des Tragwerks bis zu dessen Ausknicken elastisch verhalten. Strenggenommen müßte man mit den in den einzelnen Stäben veränderlichen und von P_k abhängenden Knickmomenten T rechnen, die man jedoch zunächst gar nicht kennt.

2. Die Formeln für h_k wurden unter vereinfachenden Annahmen abgeleitet, wie Annahme der Momentennullpunkte der ausgeboigten Gleichgewichtsfigur in den Stabmitten usw.

3. Weil man es fast immer mit Rahmen zu tun hat, deren Knoten auch zwischen den Knotenpunkten belastet werden, liefert das Bestimmung der h_k benutzte Näherungsverfahren mit dem Erdbebelastungsfall von Haus aus etwas zu große Werte für die Knicklast P_k . Bei gedungen gebauten Rahmen kann infolge der durch vorkritischen Verformungen verursachten örtlichen Plastizierungen der Knickwiderstand kleiner ausfallen, als er sich nach dem Erdbebelastungsfall herausstellt.

4. Die bisher für mehrfeldrige Stockwerkrahmen mit verschieblichen Stützenköpfen angegebenen Formeln für h_k gelten nur für symmetrischer Trägerform und Belastung, also für ein Stabilitätsproblem mit Gleichgewichtsverzweigung. Für das viel schwieriger Stabilitätsproblem ohne Gleichgewichtsverzweigung des zwischen den Knotenpunkten unsymmetrisch und durch seitlichen Wind

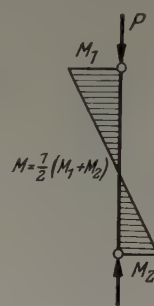


Bild 10

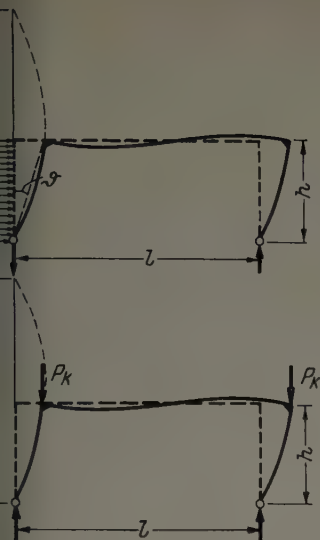


Bild 11

ng findet auch eine Stütze in einem Aufsatz von Dimitroy [14],
ir h_k eines wie in Bild 11 mit Wind belasteten Zweigelenkrahmens

anspruchten Stockwerkrahmens fehlen strenge Lösungen so gut wie vollständig. Hier wird man sich mit einer halbwegs wahrscheinlichen Näherung begnügen müssen.

Greift beispielsweise am linken Stiel des in Bild 11 gezeichneten Rahmens die Windlast p an, so erzeugt sie eine Biegelinie, die ähnlich verläuft wie die antimetrische Knickfigur des in den Ecken lotrecht mit P_k belasteten Tragwerks. Wegen des Stabdrehwinkels θ ist in beiden Fällen $h_k > 2h$. Es liegt nahe, die Stiele auf ausmittigen Druck mit der Knicklänge $h_k = \beta h$ zu bemessen, wobei β nach Gl. (3) zu ermitteln ist. Diese Auf-

eine Gleichung aufstellte, die fast genau dieselbe Knicklänge ergibt wie Gl. (3) für den mit P_k lotrecht belasteten Rahmen. Man wird daher auch bei Stockwerkrahmen, einerlei ob es sich um ein Stabilitätsproblem mit oder ohne Gleichgewichtsverzweigung handelt, stets mit den für lotrechte Belastung geltenden Knicklängen h_k rechnen.

Schrifttum:

- [1] Chwalla, Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen. Bauing. 1938, Heft 5/6, S. 69.
- [2] Chwalla u. Kollbrunner, Über das Ausknicken symmetrischer Bogenträger unter symmetrisch verteilten Belastungen. Stahlbau 1937, Heft 16, S. 121.
- [3] Chwalla u. Jokisch, Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens. Stahlbau 1941, Heft 8/9, S. 33, und Heft 10/11, S. 47.
- [4] Kollbrunner/Meister, Knicken. Berlin 1955, Springer-Verlag.
- [5] Habel, Der Einfluß des Kriechens des Betons auf die Tragfähigkeit mittig gedrückter Eisenbetonsäulen bei Knickgefahr. Bauing. 1938, Heft 9/10, S. 142.
- [6] Mörsch, Statik der Gewölbe und Rahmen. Teil B, S. 40. Stuttgart 1947, Konrad Wittwer.
- [7] Sattler, Das „Durchbiegungsverfahren“ zur Lösung von Stabilitätsproblemen. Bautechnik 1953, Heft 10, S. 288.
- [8] Puwein, Die Knickfestigkeit des Stockwerkrahmens. Stahlbau 1936, Heft 26, S. 201, 1937 Heft 1, S. 7, und 1938, Heft 14/15, S. 118.
- [9] Sahmel, Näherungsweise Berechnung der Knicklängen von Stockwerkrahmen. Stahlbau 1955, Heft 4, S. 89 und Druckfehlerberichtigung in Stahlbau 1956, Heft 5, S. 132.
- [10] Beton-Kalender 1955, 2. Teil, S. 401. Wilh. Ernst & Sohn.
- [11] Rüsch, Spannbeton-Erläuterungen zu DIN 4227, S. 50. Berlin 1954, Wilh. Ernst & Sohn.
- [12] Habel, Vorschlag für die Knickberechnung ausmittig gedrückter Stäbe mit Hilfe der erhöhten Ausweichzahlen von Jäger. B. u. St. 1955, Heft 12, S. 305.
- [13] Jäger, Die Bemessung schlanker Stahlbetonstützen auf ausmittigen Druck. B. u. St. 1955, Heft 3, S. 75.
- [14] Dimitrov, Die Einflußlinie der Theorie II. Ordnung und einige praktische Formeln. Bauing. 1953, Heft 1, S. 19.

Bestimmung des Temperaturverlaufes bei nichtstationärer Wärmeströmung in ebenen Wänden nach dem Verfahren von E. Schmidt

Von Ernst Zellerer, Ber. Ing. und Hanns Thiel, München.

DK 624.022 Wände

Aufgabe

erschiedentlich sind für die Bemessung und Beurteilung von Beton- und Stahlbetonwänden neben den Beanspruchungen aus ständigen und Verkehrslasten auch Wärmeeinflüsse zu beachten. Hierbei sind für die Spannungsermittlung die jeweiligen Temperaturverläufe oder in einfacheren Fällen wenigstens die Anfangs- und Endtemperaturen bekannt sein, die allgemein nach den Gesetzen der Wärmeübertragung berechnet werden.

Um einem näheren Eingehen auf die hier vorliegende Aufgabe sei zunächst der grundsätzliche Unterschied zwischen stationären und nichtstationären Wärmevergängen erläutert.

Wird einer Wand auf einer Seite eine bestimmte Wärmemenge Q zugeführt, so wird die Wand einen Teil für sich zur Aufheizung verwenden und nur den Rest auf der anderen Seite wieder abgeben. Sobald dann bei weiterer Wärmezuführung die Wand ihr „Wärmevermögen“ aufgebraucht hat, ist sie also aufgeheizt, so gibt sie von diesem Zeitpunkt ab die ihr zugeführte Wärmemenge auf der anderen Seite wieder voll ab, ohne weiter ihre eigene Temperatur zu verändern. Im ersten Stadium dieses Vorganges (also dem der Aufheizung), während sich die Temperatur eines Punktes im Laufe der Zeit ändert, spricht man von einem nichtstationären, im zweiten, bei dem die Temperatur von der Zeit unabhängig geworden ist, von einem stationären Wärmefluß.

Im Bauwesen spielen stationäre Vorgänge u. a. bei der Beurteilung von Gebäudewänden, Dacheindeckungen usw. eine Rolle. Ihre rechnerische Erfassung ist einfach und wird, mit praktischen Rechenbeispielen erläutert, im Normblatt DIN 4108, „Wärmeschutz im Bauwesen“, gezeigt.

Nichtstationäre Wärmevergänge finden sich im Bauwesen beispielsweise während der Hydratation des Zements im Beton, bei allen Arten von Aufheizungen, so bei Wänden, Dächern usw. unter stärkeren Wärmeeinwirkungen (z. B. auch Dächer unter Sonnenbestrahlung), in Behältern und Rohren mit temperaturschwankenden Füllungen usw. Ihre rechnerische Erfassung führt — im Gegensatz zu den stationären Vorgängen — auf partielle Differentialgleichungen, deren Lösung im allgemeinen einen großen mathematischen Aufwand

erfordern und u. U. auch recht erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Hirschfeld legt einen beachtlichen Beitrag zu all diesen Fragen im Bauwesen vor [1], der auf streng mathematischer Grundlage den Temperaturverlauf in unendlich ausgedehnt gedachten, planparallelen Betonplatten sowie in unendlich gedachten Betonzylindern behandelt, und zwar einmal unter Einwirkung der Abbindewärme des Betons bei gleichbleibender Umgebungstemperatur und zum andern bei periodischen Randtemperaturschwankungen.

Da dem Konstruktions-Ingenieur bei der Bearbeitung von Bauwerken, die nichtstationären Wärmeeinflüssen unterliegen, kaum Zeit zu langwierigen mathematischen Entwicklungen und Überlegungen belassen ist, ist eine möglichst einfache Behandlung derartiger Beanspruchungen unerlässlich.

Zweck vorliegender Arbeit ist es daher, auf ein von Prof. Dr. rer. nat. E. h. Dr.-Ing. habil Ernst Schmidt, Techn. Hochschule München, angegebenes graphisches Verfahren der Differenzenrechnung [2, 3, 4] aufmerksam zu machen und es mittels eines Beispiels zu erläutern, das eine Bestimmung des Temperaturverlaufes bzw. der maximalen Temperaturdifferenz bei nichtstationärer Wärmeströmung in praxisnaher Weise unter Ausschaltung der genannten mathematischen Schwierigkeiten ermöglicht. Das Beispiel behandelt einen ausgeführten rechteckigen Stahlbetonbehälter für eine Flüssigkeit mit wechselnder Temperatur, bei dem der Einfluß nichtstationärer Wärmeströmung untersucht worden ist.

2. Thermodynamische Grundlagen [4, 5]

2.1 Grundsätzliches

Bei den hier zu untersuchenden Wärmefragen handelt es sich grundsätzlich um den Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeiten oder Gasen (z. B. Luft) und einer ebenen Wand.

Wenn im folgenden der Einfachheit halber auch nur von Flüssigkeiten die Rede ist, so gelten die Ausführungen doch auch für Gase.

Im weiteren werden allgemein folgende Bezeichnungen gebraucht:

Q = Wärmemenge [kcal],
 t = Zeit in Stunden [h],
 ϑ = Temperatur [°],
 F = Fläche [m²],
 δ = Wanddicke [m].

2.2 Der Wärmeübergang

Für die rechnerische Erfassung des Übergangs einer Wärmemenge von einer Flüssigkeit auf einen festen Körper und umgekehrt gilt im Beharrungszustand (also wenn an allen Stellen die Temperatur zeitlich gleichbleibt) allgemein das Newtonsche Gesetz für die übergehende Wärmemenge

$$Q = \alpha \cdot F (\vartheta_f - \vartheta_w) t \text{ [kcal]}, \quad (1)$$

$$dQ = \alpha \cdot F (\vartheta_f - \vartheta_w) dt, \quad (1a)$$

wobei ϑ_f = mittlere Temperatur der Flüssigkeit,

ϑ_w = Temperatur der Wandfläche,

α = Wärmeübergangszahl [kcal/m² h °],

die alle Einflüsse der Eigenschaften und des Bewegungszustandes der Flüssigkeiten berücksichtigt.

2.3 Die stationäre Wärmeleitung

Nach DIN 4108, Ziff. 3.2 versteht man unter Wärmeleitung die Wärmeübertragung von Teilchen zu Teilchen in festen, tropfbarflüssigen und gasförmigen Körpern. Für eine ebene Wand, deren beide Oberflächen die verschiedenen Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 aufweisen, gilt für die durchströmende Wärmemenge das Fouriersche Gesetz

$$Q = \frac{\lambda \cdot F}{\delta} (\vartheta_1 - \vartheta_2) t \text{ [kcal]}, \quad (2)$$

wobei λ = Wärmeleitzahl [kcal/mh °] (Wärmefluß senkrecht zu den Oberflächen).

2.4 Der stationäre Wärmedurchgang

Als Wärmedurchgang bezeichnet man einen Vorgang, bei dem von einer Flüssigkeit Wärme an einen festen Körper übergeht, in diesem fortgeleitet wird und anschließend auf der anderen Seite auf eine zweite Flüssigkeit übergeht (Bild 1). Er besteht also aus zwei Wärmeübergängen und einer Wärmeleitung. Hierbei treten in unmittelbarer Nähe der beiden Wandoberflächen in den wärmeaustauschenden Flüssigkeiten starke Temperaturveränderungen auf, wobei jedoch an den Oberflächen selbst kein Temperatursprung vorhanden ist.

Der Temperaturverlauf in der Wand selbst ist — als besonderes Kennzeichen der stationären Wärmeströmung — geradlinig (Bild 1). Der Wärmestrom ist überall der gleiche, d. h. daß auch die abgeführte Wärme gleich der zugeführten ist.

Nach Bild 1 folgt mit den Gleichungen (1) und (2) und wegen der Unabhängigkeit der stationären Wärmeströmung von der Zeit:

$$\begin{aligned} \vartheta_a - \vartheta_1 &= Q / \alpha_1 \cdot F, \\ \vartheta_1 - \vartheta_2 &= Q \cdot \delta / \lambda \cdot F, \\ \vartheta_2 - \vartheta_b &= Q / \alpha_2 \cdot F, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei ϑ_a und ϑ_b = mittlere Temperaturen der Flüssigkeiten,

ϑ_1 und ϑ_2 = Temperaturen der Wandoberflächen.

Nach Elimination der Wandtemperaturen ϑ_1 und ϑ_2 entsteht die Péclet'sche Gleichung

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot F (\vartheta_a - \vartheta_b) = K \cdot F (\vartheta_a - \vartheta_b), \quad (3a)$$

worin der Beiwert

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \text{ [kcal/m}^2 \text{ h }^\circ]$$

als Wärmedurchgangszahl bezeichnet wird.

Das Verhältnis δ/λ wird mit $1/\Delta$ bezeichnet und heißt Wärmedurchlaßwiderstand [m²h °/kcal]. Für ihn sind in DIN 4108 festwerte als Wärmeschutz bei Aufenthaltsräumen (Tafel 3) sowie bei Außenwänden und Dächern mit Gewichten unter 300 kg/m² (Tafel 4) festgelegt, die den 3 Wärmedämmgebieten des deutschen Raumes entsprechend verschieden sind.

Verlängert man die Temperaturgerade im Innern der Wand gemäß Bild 1, so liegen die Endpunkte A und B auf einer Geraden, aus der Gleichungsgruppe (3) folgt:

$$\frac{(\vartheta_a - \vartheta_1) \cdot \alpha_1 \cdot \delta}{(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cdot \lambda} = \frac{(\vartheta_2 - \vartheta_b) \cdot \alpha_2 \cdot \delta}{(\vartheta_1 - \vartheta_2) \cdot \lambda} = 1$$

und daraus:

$$\frac{\vartheta_a - \vartheta_1}{\lambda/\alpha_1} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_b}{\lambda/\alpha_2} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta}.$$

Hierin sind: $\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\delta} = \text{tg } \varphi$ die Steigung der Geraden,

λ/α_1 und λ/α_2 = Abstände der Punkte A und B von den Wandoberflächen.

Diese Gerade bzw. der als „Richtpunkt“ bezeichnete Punkt A (B) für die Ermittlung der Temperaturkurve bei nichtstationärer Wärmeströmung von Wichtigkeit, worauf später eingegangen wird.

2.5 Das Wärmegefälle

Bei den zu untersuchenden Wänden wird in der Regel die Wandoberfläche δ klein sein gegenüber der am Wärmedurchgang beteiligten Fläche, so daß nur mit Wärmeströmung in einer Richtung, und senkrecht zur Wand, zu rechnen ist. Legt man diese Richtung in die x-Achse und geht dann von der endlichen Wanddicke δ auf das Differential dx über, so lautet Gleichung (2):

$$dQ = -\lambda \cdot F \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx.$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ stellt das Temperaturgefälle in Richtung der

x-Achse dar und besagt, daß sich die Temperatur beim Fortschreiten um die Strecke dx um den Betrag $d\vartheta$ ändert, wobei das negative Vorzeichen ausdrückt, daß die Wärme in Richtung abnehmender Temperatur strömt.

Vergleicht man die durchgeleitete Wärmemenge nach Gleichung (2) mit der übergehenden nach Gleichung (5), so ergibt sich die für stationäre und nichtstationäre Wärmeströmungen gültige Beziehung

$$\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_0 = \alpha (\vartheta_w - \vartheta_f),$$

wobei $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_0$ das Temperaturgefälle im festen Körper unmittelbar unter seiner Oberfläche ist.

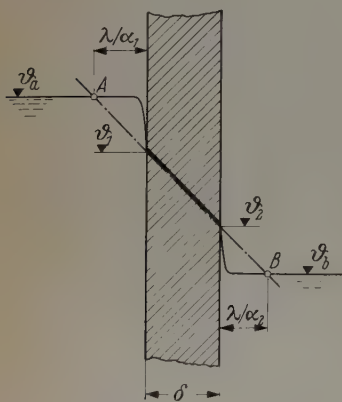


Bild 1. Stationärer Wärmedurchgang durch eine ebene Wand

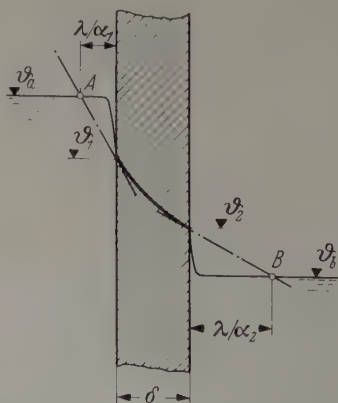


Bild 2. Nichtstationärer Wärmedurchgang durch eine ebene Wand

2.6 Die nichtstationäre Wärmeströmung

2.61 Die allgemeine Fouriersche Differentialgleichung der Wärmeleitung

Wie bereits einleitend bemerkt, ändert sich bei nichtstationärer Strömung die Temperatur im Laufe der Zeit, wodurch der Temperaturverlauf in einem nur in der x-Richtung durchströmten Körper nicht mehr geradlinig (Bild 2).

Die so gekennzeichnete nichtstationäre Wärmeströmung spielt, wie ebenfalls bereits erwähnt, bei den sogenannten

Wärme- (und Abkühlungs-) vorgängen eine Rolle, also Vorgängen, die unter Wärmezufuhr der Körper zunächst selbst Wärme speichern (sich also erwärmen) und nur eine übrigbleibende Restmenge an der anderen Seite wieder abgibt.

Die Wärmemenge, die einem Körper zuzuführen ist, um seine Temperatur von ϑ_1 auf ϑ_2 zu erhöhen (oder anders ausgedrückt, die Wärmemenge, die ein Körper speichert, damit sich seine Temperatur von ϑ_1 auf ϑ_2 erhöht) hängt von seinem Gewicht und der spezifischen Wärme ab, und folgt allgemein zu:

$$\Delta Q = G \cdot c (\vartheta_2 - \vartheta_1) = G \cdot c \cdot \Delta \vartheta \quad (7)$$

$$dQ = G \cdot c \cdot d\vartheta \quad (7a)$$

mit: c = spezifische oder Stoffwärme [kcal/kg °].

Die Wärmespeicherung ist um so größer, je größer der Unterschied zwischen der Temperatur des Bauteils und der Temperatur umgebenden Luft und je größer die Stoffwärme und die Masse (Gewicht) des Bauteils sind (DIN 4108, Abschn. 3.11).

Betrachtet man nun wieder eine plattenförmige, ebene Wand mit der Dicke dx , so folgt gem. Bild 3 für die Strömung in der x -Richtung für die austretende Wärmemenge an der Stelle x nach Gleichung (5):

$$dQ = -\lambda \cdot F \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dt.$$

Erweitert man den Betrag dx weiter, so ergibt sich mit der Differenzoperation

$$\frac{d^2 Q}{dt \cdot dx} = -\lambda \cdot F \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (8)$$

an der Stelle $x + dx$ eintretende Wärmemenge

$$dQ + d^2 Q = -\lambda \cdot F \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \right) dt. \quad (9)$$

Unterschied zwischen diesen beiden Wärmemengen:

$$d^2 Q = \lambda \cdot F \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} dx \cdot dt \quad (10)$$

in der Wand gespeichert und erhöht somit die Temperatur der Wand.

Betrachtet man die zugeführte Wärmemenge gem. Gleichung (7), differenziert diese und setzt für $G = F \cdot dx \cdot \gamma$, so erhält man:

$$d^2 Q = F \cdot dx \cdot \gamma \cdot c \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dt. \quad (11)$$

Die Gleichsetzung der Formeln (10) und (11) liefert schließlich die für die nichtstationäre Wärmeströmung gültige Fouriersche Differentialgleichung:

Wärmeströmung nur in der x -Richtung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (12)$$

bei Strömung in allen 3 Richtungen (x, y, z)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right). \quad (13)$$

Die konstante $a = \frac{\lambda}{c \cdot \gamma}$ [m²/h] wird als Temperaturleitzahl oder auch als Temperaturleitfähigkeit des Körpers bezeichnet.

Die Integration dieser Gleichung entsprechend den jeweiligen Randbedingungen einer bestimmten Aufgabe führt auf die eingangs in 1) erwähnten mathematischen Schwierigkeiten. Die Größe des erforderlichen Aufwandes ist aus [1] ersichtlich, wo für verschiedene Fälle strenge Lösungen durchgeführt wurden.

Übergang auf die Differenzenform

Wie bereits einleitend betont, gibt nun E. Schmidt ein anschauliches, graphisches Verfahren der Differenzenrechnung an, das diese mathematischen Schwierigkeiten umgeht und auch dem praktischen Ingenieur die Lösung derartiger Aufgaben mit einem vertretbaren Zeitaufwand erlaubt.

Nach [4] lautet die Differentialgleichung (12) in der Schreibweise der Differenzenrechnung

$$\Delta_t \vartheta = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \Delta x^2 \vartheta, \quad (14)$$

wobei die Zeiger „ t “ und „ x “ den partiellen Charakter der Differenzenbildung ausdrücken. Δt und Δx sind feste, endliche Zeit- und Längeneinheiten.

Betrachtet man nun eine in Δx eingeteilte Strecke (Bild 4) und setzt an der Stelle $n \cdot \Delta x$ zur Zeit $k \cdot \Delta t$ die Temperatur mit $\vartheta_{n,k}$ an, so ist:

$$\Delta_t \vartheta = \vartheta_{n,k+1} - \vartheta_{n,k}, \quad (15)$$

$$(\Delta_x \vartheta)_+ = \vartheta_{n+1,k} - \vartheta_{n,k}, \quad (16)$$

$$(\Delta_x \vartheta)_- = \vartheta_{n,k} - \vartheta_{n-1,k}, \quad (16a)$$

woraus der zweite Differenzenquotient nach x folgt zu:

$$\Delta_x^2 \vartheta = [(\Delta_x \vartheta)_+ - (\Delta_x \vartheta)_-] = \vartheta_{n+1,k} - 2 \cdot \vartheta_{n,k} + \vartheta_{n-1,k}. \quad (17)$$

Damit geht die Differenzengleichung (14) in die Rekursionsformel

$$\vartheta_{n,k+1} - \vartheta_{n,k} = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (\vartheta_{n+1,k} + \vartheta_{n-1,k} - 2\vartheta_{n,k}) \quad (18)$$

mit $a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \text{konstant}$

über, die eine einfache Konstruktion des Temperaturverlaufes ermöglicht, was im folgenden gezeigt wird.

2.63 Ausführung der Kurvenkonstruktion

2.631 Für Punkte innerhalb der Wand

Verbindet man die Punkte $(n-1)$ und $(n+1)$ der Temperaturkurve (Bild 4) durch eine Gerade, so ist die Strecke nn' gegeben als

$$\overline{nn'} = \frac{1}{2} (\vartheta_{n-1,k} + \vartheta_{n+1,k} - 2\vartheta_{n,k}). \quad (19)$$

Wie ersichtlich, ist diese Gleichung bis auf den konstanten Faktor mit der rechten Seite der Rekursionsformel (18) bzw. dem 2. Differenzenquotienten (17) identisch, d. h. die Strecke nn' liefert die Änderung der Temperatur, wobei die zugehörige Zeiteinheit durch den

konstanten Faktor $2a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ gegeben ist. Wie leicht zu ersehen ist,

wird es bei der praktischen Durchführung zweckmäßig sein, die Zeit- und Dickeneinheiten Δt und Δx so zu wählen, daß

$$a = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$$

wird, was die Allgemeingültigkeit nicht berührt. Es gibt dann der Punkt n' direkt die neue Temperatur $\vartheta_{n,k+1}$ der nächsten Kurve an und die Rekursionsformel vereinfacht sich zu:

$$\vartheta_{n,k+1} = \frac{1}{2} (\vartheta_{n+1,k} + \vartheta_{n-1,k}). \quad (20)$$

Durch entsprechendes Fortschreiten von Punkt zu Punkt um Δt erhält man so den gesamten zeitlichen Temperaturverlauf im Inneren der Wand, dessen Konstruktion, wie in [4] ausdrücklich betont wird, von einer gegebenen Anfangsverteilung ausgehend, allein mittels eines Lineals möglich ist.

Wird bei der praktischen Durchführung der Kurvenkonstruktion mit fortschreitendem Ausgleich die Temperaturdifferenz zu klein, so kann dem durch Vergrößerung der Δx -Teilung begegnet werden. Hierbei ist zu beachten, daß beispielsweise unter Beibehaltung des konstanten Faktors $a \cdot \Delta t / (\Delta x)^2 = 1/2$ bei Verdoppelung von Δx sich der zeitliche Abstand aufeinander folgender Temperaturkurven um das 4fache des bisherigen Zeitintervalles vergrößert.

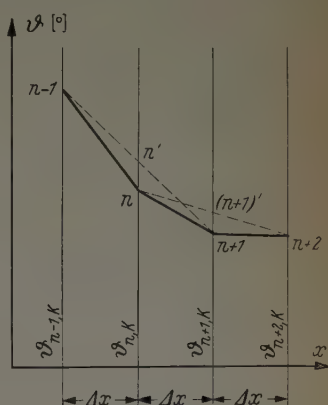


Bild 4. Erläuterung zur Anleitung der Rekursionsformel

Beim Übergang auf eine größere Δx -Teilung wird zweckmäßigerweise nicht von den Kurvenpunkten der bisherigen Teilung ausgegangen, sondern von einem Linienzug der größeren Teilung, welcher mit der ersten gleichen Flächeninhalt hat und sich möglichst gut anpaßt [4; S. 348].

2.632 Für Randpunkte

Hierfür ist zu beachten, daß die Temperaturkurve durch den Wärmeübergang zwischen der Flüssigkeit und der Wand gem. Gleichung (1) bestimmt ist.

Im Gegensatz zur stationären Wärmeströmung, bei der die Randpunkte der Wand auf der Geraden AB (Bild 1) liegen, sind bei der nichtstationären Wärmeströmung diese Randpunkte Tangentialpunkte zwischen der Wandtemperaturkurve und den Geraden durch A und B (Bild 2).

Die für die Kurvenkonstruktion maßgebenden Punkte A und B heißen Richtpunkte und liegen wieder gem. Gleichung (4) im Abstand λ/a_1 bzw. λ/a_2 von den Wandoberflächen entfernt. Da die Wärmeübergangszahl a nicht konstant ist, sondern von verschiedenen physikalischen Bedingungen abhängt [4; S. 346], ist auch die Lage eines Richtpunktes auf der Abszisse veränderlich, was sich aber, im Gegensatz zu einer streng mathematischen Lösung, mit dem Schmidt'schen Verfahren einfach berücksichtigen läßt.

Die Lage eines Richtpunktes auf der Ordinate ist durch die mittlere Temperatur der jeweiligen Flüssigkeit gegeben und ist dementsprechend veränderlich. Bleibt die Temperatur gleich, so ist dies auch der Abstand des Richtpunktes von der Abszisse.

Die praktische Ausführung der Kurvenkonstruktion ist in Bild 5 a bis d dargestellt. Hierbei muß immer mit einem bekannten Anfangszustand begonnen werden, der in der Regel durch den „Normalzustand“ der Wand, also der Wandtemperatur vor Beginn des Wärmeaustausches, gegeben ist (Bild 5 a). Die weitere Durchführung der Konstruktion kann den Bildern 5 b bis d entnommen werden.

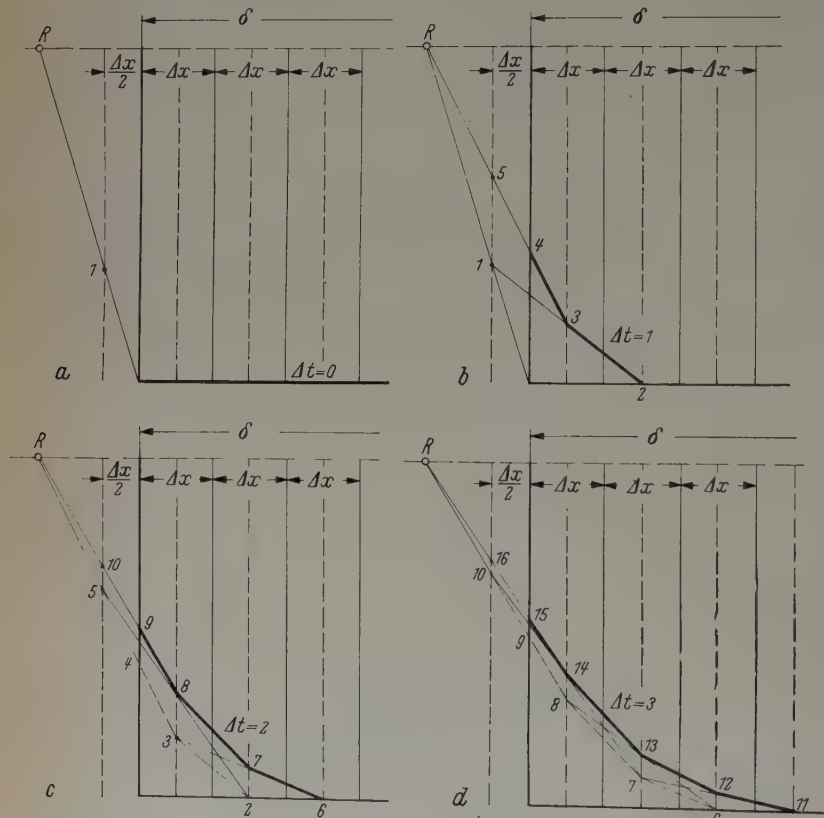


Bild 5. Konstruktion des Temperaturverlaufes in einer ebenen Wand
a) Gegebener Anfangszustand $\Delta t = 0$
b) bis d) Temperaturkurven für die Zeitintervalle $\Delta t = 1$ bis $\Delta t = 3$

3. Beispiel

3.1 Kurze Baubeschreibung

Zur Erläuterung der bisherigen Ausführungen werden als Beispiel

einige Ergebnisse aus einer Untersuchung für rechteckige Stahlzellen von 30 m^3 Fassungsvermögen mitgeteilt.

Da es sich um Flüssigkeitsbehälter handelte, war für die Innenseiten eine 4 cm dicke Zementputzschicht als rissfreie Auskleidung gefordert, während die Außenseiten 12 cm dicke Korkplatten-Wärmedämmung erhalten und mit einer 24 cm dicken Ziegelschicht verkleidet werden sollten.

3.2 Thermischer Vorgang und Aufgabenstellung

Die eingefüllte Flüssigkeit von $\sim 20^\circ$ sollte durch Kühlschlamm langsam auf -8° abgekühlt und dann abgelassen werden. Aus Messungen an bestehenden Ausführungen war bekannt, daß der beschriebenen Wärmedämmung die Wandaußenseiten nach der Abkühlung ebenfalls -8° aufwiesen.

Die abgekühlte, leere Zelle sollte dann anschließend wieder mit einer 20° warmen Flüssigkeit gefüllt werden, wobei wiederum aus der Erfahrung bekannt war, daß die Flüssigkeit bis zur Wandabkühlung ihre Temperatur annähernd beibehielt.

Während nun der Abkühlungsvorgang wegen des längeren Zellenraumes stationär ist, stellt sich bei der Einfüllung der 20° warmen Flüssigkeit eine nichtstationäre Wärmeströmung ein, für die zusätzliche Beanspruchung der Betonwände bzw. der geforderten Putzschicht, die rissfrei bleiben sollte, erwartet werden muß. Ziel der Untersuchung sind daher eine genauere Bestimmung der Wärmeströmung bzw. der dabei auftretenden größten Temperaturunterschiede zwischen den Wandoberflächen sowie die zeitlichen Temperaturänderungen.

Der besseren Übersichtlichkeit wegen wird für das Beispiel ein Unterschied der Putzschichten gegenüber dem Beton vernachlässigt und nur mit Beton gerechnet. Aus dem Beschriebenen heraus ist es aber einfach sein, gegebenenfalls einen Unterschied zu berücksichtigen. Nach dem Beispiel in Bild 6 ist die Putzschicht in die Wand einbezogen.

3.2 Physikalische Festwerte

Die Werte für die Wärmeleitfähigkeit λ , die Wärmeübergangszahl a sowie die spezifische Wärme c sind nicht einheitlich festgelegt und schwanken in nicht unbedeutenden Grenzen. Die in Frage kommenden Größen sind daher von Fall zu Fall entsprechend zu wählen, wobei auf die bekannten Fach- und Handbüchern mit den dort enthaltenen Hinweisen zurückgegriffen werden kann.

Für das gezeigte Beispiel wurden gewählt:

- Wärmeleitfähigkeit des Betons: $\lambda = 1,10 \text{ kcal/m h}^\circ$
- spez. Wärme des Betons: $c = 0,21 \text{ kcal/kg}^\circ$
- Rohdichte des Betons: $\gamma = 2400 \text{ kg/m}^3$
- Wärmeübergangszahl: für den hier vorliegenden Fall des Wärmeüberganges von einer Flüssigkeit auf eine senkrechte Platte

$$\text{für } t < 15^\circ \quad \alpha = 3,0 + 0,08 \cdot \Delta \vartheta$$

$$\text{für } t > 15^\circ \quad \alpha = 2,2 \sqrt[4]{\Delta \vartheta}$$

Mit $\max \vartheta = 20^\circ$ und $\min \vartheta = -8^\circ$ folgt für den Einfüllungszustand:

$$\alpha = 2,2 \sqrt[4]{28} = 5,06 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^\circ$$

3.3 Kurvenkonstruktion

$$\text{Temperaturleitfähigkeit: } a = \lambda / c \cdot \gamma = 1,1 / 0,21 \cdot 2400 = 0,00218 \text{ m}^2/\text{h}$$

Abstand des ersten Richtpunktes R für -8° (Anfangszustand) von der Wandoberfläche:

$$s = \lambda / \alpha = 1,1 / 5,06 = 0,217 \text{ m}$$

Längenintervall aus $\delta = 19 \text{ cm}$ Wanddicke:

$$\Delta x = \delta / 10 = 19 / 10 = 1,9 \text{ cm}$$

Zeitlicher Abstand zweier aufeinander folgender Temperaturkurven

$$\Delta t = \frac{(\Delta x)^2}{2a} = \frac{0,019^2}{2 \cdot 0,00218} = 0,0828 \text{ Stunden}$$

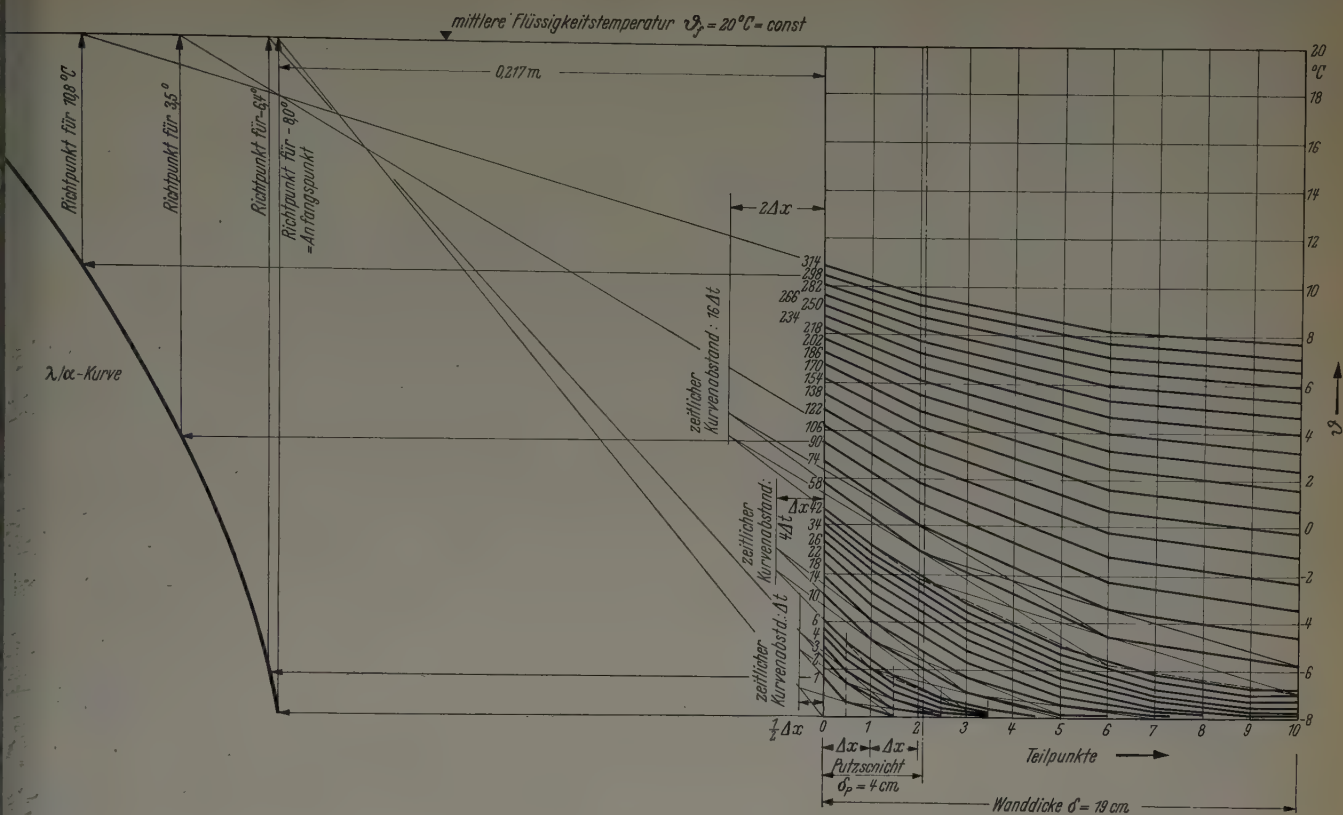


Bild 6. Ausführte Kurvenkonstruktionen der Temperaturverläufe für 0 bis 26 Std. bei nichtstationärer Wärmeströmung in einer ebenen Wand (Beispiel)

ch Aufzeichnen des Wandschnittes mit der gewählten Unter-
terung in die Δx - und $\Delta \vartheta$ -Intervalle gem. Bild 6 werden zunächst
Gl. (21) für verschiedene Temperaturdifferenzen die α -Werte
eraus dann der Quotient λ/α berechnet und über ϑ aufgetragen.
t ist für jeden Richtpunkt der mit α veränderliche Abstand von
rdinate bekannt.

r Abstand der Richtpunkte von der Abszisse ist konstant und
a die voraussetzungsgemäß gleichbleibende mittlere Temperatur
 Flüssigkeit gegeben.

t diesen Festlegungen ist jeder Temperatur der Wandoberfläche
bestimmter Richtpunkt zugeordnet, dessen einfache konstruk-
Bestimmung aus Bild 6 ersichtlich ist. Ist neben der mittleren
igkeitstemperatur auch der α -Wert konstant, erhält man nur
einigen Richtpunkt. Wären umgekehrt als Randbedingungen
hl der α -Wert wie auch die mittlere Flüssig-
temperatur veränderlich, so ließe sich dies
o leicht berücksichtigen, da an Stelle der
emperaturgeraden nur die entsprechende Kurve

ittels der Richtpunkte kann dann mit der
onstruktion der Temperaturkurven begonnen
en, wobei in Bild 6 von der konstanten Wand-
peratur $\vartheta = -8^{\circ}$ (Randbedingung) ausgegan-
wird. Nach Ausführung der Konstruktionsvor-
ten gem. Bild 5a bis d und entsprechender
erholung gelangt man schließlich nach 6 Δt -
eiten zu so kleinen Kurvenabständen, daß eine
s. 2 beschriebene Vergrößerung des Längen-
alles von $(1/2) \Delta x$ auf Δx erforderlich wird.
ei ist zu beachten, daß der zeitliche Kurven-
holung sich damit von $\Delta t = 0,0828$ Std. auf
= 0,331 Std. ändert, um schließlich nach aber-
er Vergrößerung auf $2 \Delta x$ auf 1,325 Std. an-
ehen.

l 6 zeigt die fertige Kurvenkonstruktion für
Bereich von -8° bis $+9^{\circ}$, was einer Zeit-
e von 0 bis $314 \cdot 0,0828 \approx 26$ Std. entspricht.
ine Weiterführung konnte verzichtet werden,
r Ort des für die Spannungsermittlung wich-

tigen größten Temperaturunterschiedes der Wandpunkte bereits
mit Sicherheit überschritten wurde.

3.4 Bestimmung des größten Temperaturunterschiedes für die Spannungsermittlung

Aus Bild 6 folgen zunächst unmittelbar die Temperaturdifferenzen
zwischen den beiden Wandaußenseiten. Trägt man nun diese in Ab-
hängigkeit von der Zeit auf, so erhält man schließlich die für die
Spannungsberechnung erforderliche größte Temperaturdifferenz
max $\Delta \vartheta$ (Bild 7).

Die statischen Größen können damit nach dem einschlägigen
Schrifttum für ungleichmäßige Erwärmung ermittelt werden, worauf
weiter einzugehen sich erübrigt. Erwähnt sei nur, daß danach, den
üblichen Voraussetzungen folgend, im weiteren mit linearer Tem-
peraturverteilung gerechnet werden darf.

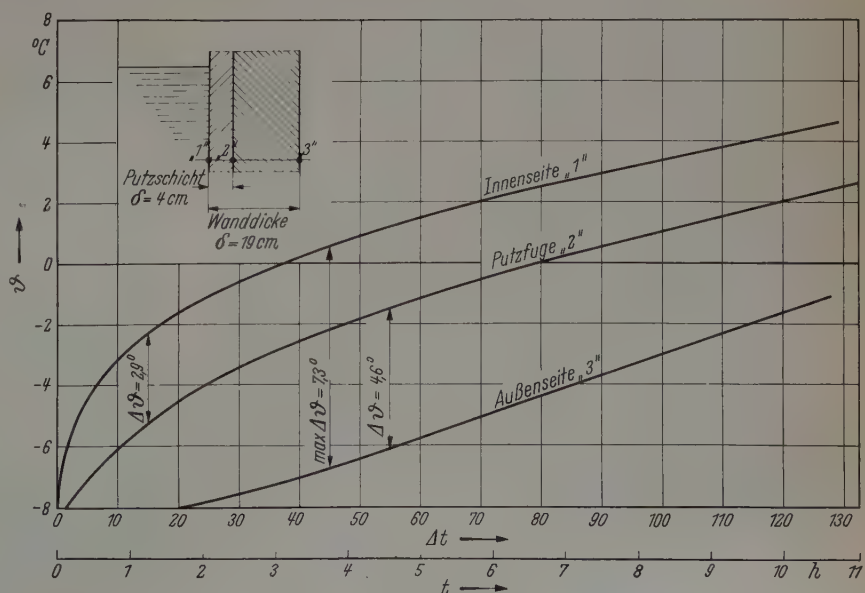


Bild 7. Zeitliche Änderung des Temperaturverlaufes in einzelnen Schnitten

3.5 Einige Folgerungen

Wenn auch im vorliegenden Fall die Temperaturschwankungen in den Stahlbetonwänden selbst nur verhältnismäßig kleine Spannungen bewirken, so ist doch die Bedeutung der Untersuchungen bereits allein aus der folgenden Betrachtung der Zementputzschicht ersichtlich.

Die Putzschicht der Innenseiten spielt bei Flüssigkeitsbehältern in der Regel eine große Rolle, da mit ihr eine dichte Auskleidung angestrebt und für sie Rissefreiheit gefordert wird. Andererseits müssen aber gerade derartige Zementputzschichten allein schon mit Rücksicht auf ihre Verarbeitung einen hohen Wasser-Zement-Wert aufweisen, wodurch von vornherein eine nicht unerhebliche Rissegefahr durch Schwinden gegeben ist.

Wenn im Beispiel auch auf eine genauere Berücksichtigung der Putzschicht verzichtet wurde, so kann das Ergebnis der Rechnung trotzdem praktisch als ausreichend genau angesehen werden, da die thermischen Kennwerte (λ und c) von Zementputz und Beton nahezu gleich sind. Es genügt also, in Bild 5 einen, der Putzdicke von 4 cm entsprechenden, senkrechten Schnitt zu legen und die darauf fallenden Größen abzulesen.

Würde die Putzschicht frei für sich allein stehen und statisch bestimmt gelagert sein, ergäbe sich durch die Temperaturbeanspruchung eine leichte Verwölbung nach außen, wobei keine Spannungen entstünden. Da jedoch die Stahlbetonwände mit ihrer weit größeren Steifigkeit diese Verwölbung wesentlich behindern werden, treten im Putz entsprechende Spannungen auf.

Unter Vernachlässigung der Durchbiegung der Stahlbetonplatte und damit der der Putzschicht folgen bei Annahme behinderter Formänderungen die Spannungen aus der Wärmebeanspruchung zu

$$\sigma_{\vartheta} = E \cdot \varepsilon_{\vartheta} \cdot \Delta \vartheta \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

und nach DIN 1045 § 16/17 mit:

$$E = 210\,000 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\varepsilon = 1/100\,000,$$

$$\sigma_{\vartheta} = 2,1 \cdot \Delta \vartheta \text{ [kg/cm}^2\text{]}$$

bei dreieckförmiger Spannungsverteilung.

Damit ergibt sich für das Beispiel mit $\max \Delta \vartheta = 2,9^\circ$ gem. Bild 7

$$\max \Delta \vartheta = 2,1 \cdot 2,9 = 6,09 \text{ kg/cm}^2 \text{ Zug.}$$

Kann, wie beispielsweise hier, wegen der statischen Unbestimmtheit keine unbehinderte Formänderung eintreten, so geht die dreieckige Spannungsverteilung in eine trapezförmige über, wobei aber die Spannungsdifferenz zwischen Außen- und Innenseite den oben berechneten Größtwert beibehält.

Für die Zementputzschicht ist dieser Spannungswert bereits erheblich zu groß und führt mit Sicherheit zu unerwünschten Rissen. Schließlich auch Anlaß zu dieser Untersuchung gaben. Als wirkliche Abhilfen wurde im vorliegenden Fall entweder eine Änderung der thermischen Vorgänge (Vorerwärmung der abgekühlten Zelle) oder das Verlegen engmaschiger Stahlmatten im Putz vorgeschlagen.

4. Zusammenfassung

Für die Berechnung bzw. Beurteilung von Temperaturbeanspruchungen ist die Kenntnis der maximalen Temperaturdifferenz erforderlich, deren Ermittlung sich nach der jeweils vorliegenden stationären oder nichtstationären Wärmeströmung richtet. Während die Erfassung stationärer Strömungen einfach ist und als bekannt vorausgesetzt werden darf, ist die Untersuchung nichtstationärer Wärmeströmungen weniger geläufig. Da ihre genaue mathematische Behandlung im allgemeinen zu größeren Schwierigkeiten führt, wird mit vorliegender Arbeit auf ein von E. Schmidt angegebenes graphisches Verfahren der Differenzenrechnung hingewiesen, das die Bestimmung des Temperaturverlaufes der nichtstationären Wärmeströmung in einfacher, allgemein verständlicher Weise ermöglicht. Aus dem Temperaturverlauf können die für die Spannungsbestimmung erforderlichen Temperaturdifferenzen abgelesen werden, worauf dann die statischen Größen nach den bekannten Gleichungen für ungleichmäßige Erwärmung ermittelt werden.

Ausführung und Anwendung werden am Beispiel eines dreieckigen Flüssigkeitsbehälters mit Stahlbetonwänden erläutert, bei sich zeigt, daß derartigen Einflüssen größere Bedeutung zukommen kann.

Schrifttum:

- [1] Hirschfeld, Die Temperaturverteilung im Beton, Berlin 1948, Springer-Verlag.
- [2] Schmidt, Das Differenzenverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, nichtstationären Wärmeleitung, Diffusion und Impulsausbreitung. Forsch. Ing.-Wes. Bd. 1942, S. 177—185.
- [3] Schmidt, Über die Anwendung der Differenzenrechnung auf technische Aufgaben und Abkühlungsprobleme. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik (Föpl-Festschrift), Berlin 1924, Springer-Verlag.
- [4] Schmidt, Thermodynamik, 5. Aufl., Berlin 1953, Springer-Verlag.
- [5] Nußelt, Technische Thermodynamik II, Sammlung Göschen, Band 1151, Berlin 1950.

Fabrikgebäude für Franke & Heidecke in Braunschweig

Von Dr.-Ing. Otto Dreves u. Dipl.-Ing. Eugen Lang, Braunschweig

DK 725.4.012.45 Fabrikgebäude aus Stahlbeton

Die als Herstellerin photographischer Präzisionsapparate bekannte Fa. Franke & Heidecke erweiterte ihre Fabrikanlage im Jahre 1955 um einen Neubau, der vor allem die Lackiererei und Schleiferei aufnehmen sollte. Bei dem Neubau ist die Ausbildung der Decken bemerkenswert.

Der Neubau wurde als Stahlbetonskelett ausgeführt. Das Gebäude hat eine Länge von 55,25 m und eine Breite von 15,75 m. Es wurde eine Dehnungsfuge angeordnet, obwohl Längenänderungen aus Schwinden und Temperatureinwirkung von den schlanken, von oben bis unten einheitlich 25 cm breiten Stützen nur wenig behindert werden. Die Beobachtung des Gebäudes ließ selbst bei der großen Kälte im Februar 1956 keine Risse im Beton erkennen.

In der Querrichtung wird das 6geschossige Gebäude, dessen Querschnitt Bild 1 zeigt, aus zwei 2stieligen Stockwerkrahmen gebildet, die in 5 m Abstand stehen. Beide Rahmen können auf die nachstehend beschriebene Weise als gelenkig verbunden angesehen werden. In der Unterkante der Decke krügen beiderseits Stahlbetonplatten rd. 1,40 m in das Mittelfeld aus; an ihrem Ende sind sie durch Rippen, die in Gebäudelängsrichtung laufen, abgeschlossen. Diese Rippen sind Auflager der 10 bzw. 7 cm dicken Fertigteilplatten, mit denen die Klimakanäle abgedeckt sind und die den Fußboden des Mittelfeldes bilden; zugleich sind sie Trennwände der Klimakanäle (s. Bild 2 b). Zwischen den auskragen-

den Platten ist eine 5,5 cm dicke Stahlbetonplatte als unterer schluß des mittleren Klimakanals (Abluftkanal) gespannt. In die Platte ist zusätzlich eine Bewehrung zur zugfesten Verbindung beider zweiseitigen Rahmen eingelegt, während Druckkräfte durch die erwähnten Fertigteilplatten übertragen werden können. Auf diese Weise wird der Winddruck auf die Längswand von beiden Rahmen zugleich aufgenommen. Im übrigen werden die Querrahmen von der Decke nur gering belastet, da diese Decke gleichzeitig laufend zu ihnen gespannt ist.

Die Deckenlast wird auf die in der Längsrichtung durchlaufenden Unterzüge abgesetzt. Sie wurden mit den Stützen in einfacher Weise nach DIN 1045, § 28, Rahmenartige Tragwerke, berechnet. Im Verhältnis zu den hohen Deckenlasten mit 750 kg/m² Nutzlast ist der Einfluß des Winddruckes auf den Giebel gering, so daß er von vier Längsrahmen leicht aufgenommen wird.

Für die Ausbildung der Decken waren betriebliche Forderungen entscheidend. Die Räume für die Lackiererei und Schleiferei benötigten vor allem eine gute Belüftung und Entlüftung mittels einer Klimaanlage. Dazu kam die Forderung des Bauherrn, an jeder beliebigen Stelle des Fußbodens ein Kabel für den Anschluß der Präzisionsmaschinen herausnehmen zu können. Die Eigenart des Betriebs führte zu häufigen Umstellungen und Auswechselungen dieser Maschinen, wobei dann auf dem Fußboden liegende Kabel sehr hinderlich

den. Die Kabel sollten daher bis zum Anschluß an die Maschine
 r dem Fußboden liegen. Schließlich war noch die Bedingung
 der Unterfläche der Decken zu erfüllen,

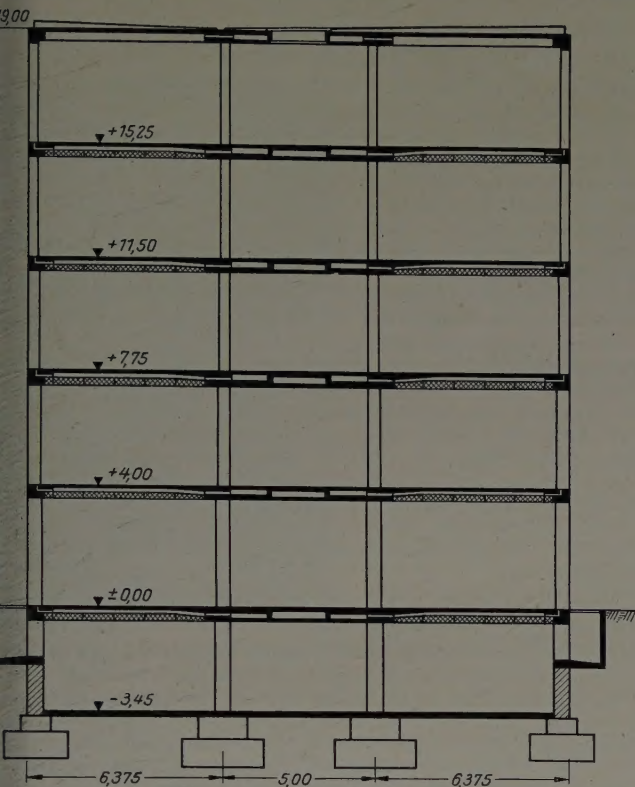


Bild 1. Querschnitt des Gebäudes



Bild 2a. Ausbildung der Decke im Außenfeld, Schnitt in Längsrichtung des Gebäudes

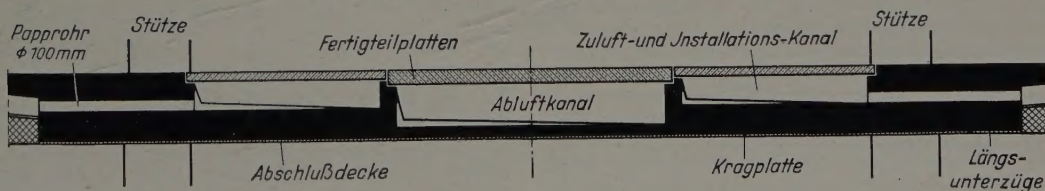


Bild 2b. Querschnitte der Decke im Innenfeld mit Klimakanälen



Bild 3. Stahlbetonskelett fertiggestellt

Die Deckenhöhe wurde von der erforderlichen Größe der Kanäle für die Zuführung und Ableitung der Luft in den einzelnen Geschossen bestimmt. Mit der verfügbaren Breite zwischen den beiden Rahmen ergaben sich für den in der Mitte liegenden Abluftkanal eine Breite von 180 cm mit 28 cm lichter Höhe und für die seitlich geführten zwei Zuluftkanäle je 125 cm Breite mit 18 cm Höhe (s. Bild 2 b). Um die Gesamthöhe der Decke, die von ihrer Ausbildung im Mittelraum bestimmt wurde, möglichst niedrig zu halten, wurde hier die bereits zuvor beschriebene Konstruktion gewählt. Es gelang so, mit einer Höhe von 45 cm auszukommen.

Die Höhe von 45 cm stand auch in den Seitenfeldern zur Verfügung; sie reichte für die Querrahmenriegel und die Längsunterzüge aus. In diesen Decken waren Luftkanäle und Rohre für Kabel vorzusehen. Es lag nahe, beide zu vereinigen. Dies führte zu der in Bild 2 a gezeigten Ausbildung der Decke, in der zwischen den Rahmen 8 Rohre, die einen Durchmesser von 150 mm haben mußten, geführt sind. Um die Decke möglichst leicht zu halten, wurde sie als Rippendecke mit 7 cm dicker Platte ausgebildet. Die Räume zwischen den Rippen sind mit Perfekta-Deckenkörpern, die aus zementgebundener Holzwolke mit einem Raumgewicht von 400 kg/m³ hergestellt werden, ausgefüllt. Für die untere Lage wurden die üblichen Körper in den Abmessungen 50 × 100 cm und 18 cm Höhe verwendet, während für die obere Lage sogenannte U-Körper für die Aufnahme der Rohre besonders angefertigt wurden.

Die Wände der Rohre bestehen aus wasserfest verleimter Pappe von 3 mm Dicke. Für spätere Kabelanschlüsse lassen sie sich leicht durchschlagen, nachdem zuvor die Deckenplatte durchbohrt oder aufgestemmt worden ist.

Für die Außenseiten der Stützen wurde Sichtbeton verlangt. Hierfür wurde die Innenfläche der Schalung mit einer 4 mm dicken Sperrholzplatte, und zwar Betoplan, koch- und wasserfest verleimtes Sperrholz mit einer Kunstharz-Oberfläche der Sperrholzwerke Wiedenbrück, versehen. Diese Platten haben sich ohne weitere Behandlung gut bewährt; irgendwelche Unebenheiten durch Verziehen der Platten haben sich nicht gezeigt. Die Zuschlagstoffe des Betons

waren unter Zugabe von Mehlsand auf die Korngruppen 0/3, 3/7, 7/15 und 15/30 abgestuft. Der Beton kam überall einwandfrei aus der Schalung.

Das gesamte Gebäude wurde in Betongüte 300 hergestellt, unter Verwendung von 325 kg Zement Z 325/m³ Fertigbeton. Die vier getrennten Körnungen wurden mittels Handschraper von den Vorratsbunkern einem Vorwiegesilo zugeführt und sorgfältig abgemessen. Der Zement lief über eine Waage unmittelbar in den Vorwiegesilo.

Die gesamten Betonarbeiten wurden mit Hilfe eines Turmdrehkranes durchgeführt. Bild 3 zeigt die Baustelleneinrichtung und den fertiggestellten Skelettbau, die oberen Geschosse noch eingeschalt. Von den Fundamenten bis zur Fertigstellung der Dachdecke wurden 67 Arbeitstage benötigt. Eingebaut wurden 1700 m³ Beton und 140 t Torstahl.

Die Planung lag in den Händen von Prof. Dr.-Ing. K r a e m e r, Technische Hochschule Braunschweig. Die konstruktive und statische Bearbeitung wie der gesamte Bau wurden von der Bauunternehmung Carl Weiss, Braunschweig, durchgeführt.

Verschiedenes

Hundertjahrfeier des Vereins Deutscher Ingenieure in Berlin

Mit einer festlichen Tagung in Berlin beging der Verein Deutscher Ingenieure vom 11. bis 15. Mai die Feier seines hundertjährigen Bestehens, zu der über 3000 Teilnehmer aus dem Bundesgebiet eingetroffen waren.

Neben zahlreichen Fachvorträgen und Besichtigungen waren in der großen Festhalle „Ostpreußen“ am Funkturm an zwei Vormittagen allgemeine Vorträge anberaumt. Nach der Eröffnung durch Herrn Prof. Dr.-Ing. Siebel, Stuttgart, sprach zunächst Prof. Dr. rer. techn. Vieweg, Präsident der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt, Braunschweig, über „Naturwissenschaft und Technik“. Mit Seitenblicken auf die Bewertung in der Weltordnung schilderte er die gegenseitige Befruchtung von Naturwissenschaft und Technik. Er wies hin auf die Entwicklung der Thermodynamik, Elektromagnetik, Elektronik und Quantenlehre zur modernen Atomphysik. Auf diesen Erkenntnissen fußend, entwickelten sich in der Technik Dampfmaschine, Dynamo, Elektromotor und Verbrennungskraftmaschine und weiter Turbine und Rückstoßantrieb. Als Ausgleich für eine gewisse Minderleistung auf dem Gebiet der Kunst gegenüber früheren Jahrhunderten sei in unserem Zeitalter größter Fortschritt der technischen Wissenschaften zu verzeichnen. Präzision, Inspiration und Disziplin spielen hierbei eine größere Rolle als je zuvor. Die Grenzen der Meßgenauigkeit — in der Naturwissenschaft einmal durch die Brownische Molekularbewegung abgesteckt — werden auf anderen Gebieten durch Forderungen der Technik erweitert. Auf dem Gebiet der Zeitmessung gab die Entwicklung zur Quarzuhr uns die Möglichkeit festzustellen, daß sogar die Drehgeschwindigkeit der Erde nicht streng konstant ist, sondern im Laufe eines Tages um $\frac{1}{1000}$ Sekunde schwankt.

Als Beispiel für ein echtes, ebenbürtiges Zusammenspiel der Kräfte bezeichnete der Vortragende die elektronischen Rechenmaschinen; denn hier kann man weder die Technik als Hilfswissenschaft der Mathematik bezeichnen noch umgekehrt. Diesen Maschinen fehlt nur noch die Phantasie, sonst könnte man sie wahrlich als künstliche Gehirne bezeichnen.

Die gegenseitige Steigerung von tat-gerichteter Technik und erkenntnis-gerichteter Naturwissenschaft schaffen gute Vorbedingungen zu neuer fruchtbarer Arbeit.

Anschließend entwickelte Prof. Dr. Finkelburg, Erlangen, ähnliche Gedankengänge. Er sah die „Entwicklungsrichtungen der Technik“ vor allem in der immer enger werdenden Verknüpfung mit naturwissenschaftlichen Erkenntnissen, die der Ingenieur in zunehmendem Maße für die Lösung seiner Aufgaben verwendet. Die Zeitspanne zwischen einer naturwissenschaftlichen Entdeckung und ihrer großtechnischen Nutzung hat sich in früher nicht vorstellbarem Maße verkürzt. Das führt zu Konsequenzen in der Nachwuchsausbildung und in der praktischen Arbeit (teamwork). Der Mißbrauch der Technik ist nicht Schuld des Ingenieurs, sondern darauf zurückzuführen, daß die Menschheit in ihrer geistigen und sittlichen wie auch in der politischen Entwicklung mit der naturwissenschaftlich-technischen nicht Schritt gehalten hat. Nur engste Zusammenarbeit von Technikern und Forschern mit Geistes- und Sozialwissenschaftlern wie auch mit Politikern kann das gegenseitige Verständnis auch über die politischen Grenzen hinaus fördern.

Gerade darum ist es dem Verein Deutscher Ingenieure zu danken, daß er mit so zahlreichen, stets das gleiche Thema aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchtenden Ausführungen die Ingenieure aus den Fesseln ihrer Spezialgebiete löste und zu geisteswissenschaftlichen Betrachtungen anregte.

So ist es auch verständlich, daß der Vorsitzende, Bundesminister a. D. Dr.-Ing. E. h. Dipl.-Ing. Schubert, seine Begrüßungsansprache aus Anlaß der eigentlichen Festsitzung zu einem Vortrag erweiterte, in dem er den Stand der Technik gewissermaßen als geschichtlichen Hintergrund malte, vor dem sich am 12. Mai 1856 in Alexisbad die Gründung des VDI vollzog, dessen Mitgliederzahl von 23 im Laufe der 100 Jahre auf 32 000 gewachsen ist und dessen Ziele und Aufgaben heute keine anderen sind als damals.

Voran steht die technisch-wissenschaftliche Förderung des Nachwuchses, das Schrifttum und die Dokumentation. Damit einher geht die menschliche Erziehung des Ingenieurs, das Wirken auf politischer Ebene, das Ringen um den Namensschutz des Ingenieurs, um seinen Einsatz als Richter im Patentwesen und um seine Verwendung in Staat und Verwaltung.

Den eigentlichen Festvortrag „Der Mensch und seine Technik“ hielt der Präsident der Bundesanstalt für Materialprüfung, Berlin-

Dahlem, Prof. Dr.-Ing. Pfender, der sich ebenso als Redner wie Ingenieur und Philosoph mit Recht höchster Schätzung erfreut.

Als den ersten und entscheidenden Bereich für die Entwicklung der modernen Technik bezeichnete er die Möglichkeit, große, billige Energiemengen zu erzeugen, die Energieform wandeln, sie damit nach Belieben verteilen oder sammeln zu können. Wichtig ist die Entwicklung des Transport- und Fernmeldewesens. Nachrichten, Politik, Handel und Verkehr zum Austausch Gütern, Sitten und Gebräuchen unter den Völkern der Erde. dritte Bereich umfaßt mit dem Finden und Fördern natürlicher der Synthese künstlicher Stoffe sowie deren Veredlung und Veredlung die ganze materielle Grundlage der modernen Technik.

Als vordringlichste Zukunftsaufgaben der Technik erwähnte Redner die Behebung der Wassernot und die Erschließung neuer Energiequellen (Atom- und Sonnenenergie), die Beseitigung der durch die Industrie hervorgerufenen Verschmutzung der Luft und die Bekämpfung des Lärms. Er wies auch hin auf die unhaltbare unzureichende Not der Studenten, die unvereinbar ist mit den sonstigen hoch gesteckten sozialen Forderungen unserer Zeit. Auch die akademischen Lehrer können nicht auf eine materiell zufriedenstellende Existenz hinweisen, die zahlungskräftige Industrie zieht immer wieder für sich Kräfte an sich.

Diese Situation an den Hochschulen birgt die Gefahr in sich, daß sich später die Studenten mit ihren Fähigkeiten und erworbenen Kenntnissen gegen eine verständnislose Gesellschaft wenden.

Wie in diesem engeren Bereich unmittelbarer Sorgen muß auf höchster Ebene der Interessenausgleich zwischen Person, Gruppen, Organisationen und Völkern als verantwortungsvolle Aufgabe des einzelnen, des Rechtes und des Staates gefordert werden. Die fast unbegrenzten Möglichkeiten der Technik können nur zugute kommen, wenn Egoismen der Personen und der Nationen gezügelt werden. Die Vielfalt und Eigenart würden allen zum Nutzen und der Wettbewerb ließe sich zum ehrenhaften Handeln kultivieren.

In den Begrüßungsansprachen von Vertretern des In- und Auslandes wies vor allem Vizekanzler Dr. Blücher darauf hin, daß endlich auf höchster Ebene die Notwendigkeit der Nachwuchsförderung erkannt habe. Professor Lorenz, Rektor der Technischen Universität Berlin, machte hierzu praktische Vorschläge.

Die höchste Ehrung, die der Verein Deutscher Ingenieure zu vergeben hat, die goldene Grashof-Denkmünze, wurde dem Erfinder Dr.-Ing. E. h. techn. Dr. F. Ljungström, Schweden, und dem Dr. rer. nat. E. h. Dr.-Ing. E. Schmidt, München, verliehen.

Unter den weiteren Ehrungen sei erwähnt, daß unter anderem Prof. Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, und Prof. Dr. G. Garb-Aachen, mit dem VDI-Ehrenzeichen ausgezeichnet wurden. Als Frau erhielt Prof. Dr. Lilian Gilbreth ebenfalls das VDI-Ehrenzeichen für ihre grundlegenden Arbeiten auf dem Gebiet der Fertigungsstudien. Frau Gilbreth ist der weiteren Öffentlichkeit bekannt durch ihren Roman „Im Dutzend billiger“.

Die Organisation der Jubiläumstagung durch die auf dem Gebiet erfahrene Geschäftsführung des VDI kann als musterhaft bezeichnet werden. Selbst die Aufgabe, etwa 4000 Besucher Damen zu einem geselligen Berliner Abend in den Ausstellungshallen Ostpreußen und Westpreußen zusammenzuführen, wurde sehr gelöst.

Mis

Hochschulnachrichten

Die Technische Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig hat anläßlich der Einweihung des hauptsächlich der Fakultät Bauwesen dienenden Hochhausneubaus die Würde eines Doktors des Ingenieurs ehrenhalber verliehen an die Herren:

Professor Friedrich Wilhelm Neuffer, Emeritus der Technischen Hochschule Dresden, „in Anerkennung seiner erfolgreichen Bemühungen um neue Gestaltungsformen massiver Brücken sowie um die Förderung und Weiterentwicklung der Bodenmechanik“.

Professor Dr.-Ing. Ferdinand Schleicher, Dortmund, „in Anerkennung seiner für die Entwicklung des Stahlbaues geleisteten Arbeiten und seiner großen Verdienste um die allgemeine Förderung der Bauingenieur-Wissenschaften“.

Persönliches

Dr.-Ing. Kurt Gaede 70 Jahre alt

Am 27. Juli 1956 vollendet Prof. Dr.-Ing. Kurt Gaede, Hannover, sein 70. Lebensjahr. Er ist seit Herbst 1954 emeritiert, aber noch unermüdet tätig in Lehre, Forschung und technisch-wissenschaftlicher Gemeinschaftsarbeit.



Bereits mit 22 Jahren legte der in Nienburg an der Weser Geborene die Diplom-Ingenieur-Prüfung an der Technischen Hochschule Berlin ab, und zwar „mit Auszeichnung“, ebenso wie später die 2. Staatsprüfung als Regierungsbaumeister des Eisenbahn- und Straßenbauwesens. Etwa 12 Jahre später erwarb er mit dem gleichen Prädikat die Doktor-Würde an der Technischen Hochschule Hannover. Als junger Regierungsbaumeister wurde er Mitarbeiter Schapers bei Entwurf und Ausführung der stählernen Eisenbahnbrücke über den Rhein unterhalb von Ruhrort und 400 m langen Eisenbahnbrücke aus Stahlbeton über das Johannisfeld bei Bielefeld. Von 1919 bis 1922 war er Mitarbeiter Schapers im Preussischen Ministerium der öffentlichen Arbeiten und nach Auflösung im Reichsverkehrsministerium. Hier wirkte er an der Schaffung der ersten Fassung der „Berechnungsgrundlagen für Eisenbahnbrücken (BE)“, ferner auch bei der Schriftleitung des „Archiv für Eisenbahnwesen“ und der „Zeitschrift des Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen“.

Als Regierungsbaumeister verließ er den öffentlichen Dienst und wurde stellv. Vorstandsmitglied der Deutschen Eisenbahnsignalwerke und 1926 ordentliches Vorstandsmitglied der Eisenbahnsignalanstalt Max Jüdel Stahmer, Bruchsal AG. und Leiter des Werks in Georgsmarienhütte. In den Jahren 1928/29 leitete er die Beton- und Stahlbetonabteilung der A. Diehl, Hoch-, Tief- und Beton AG., Essen. 1930 wurde er Direktor der Hochtief AG., Düsseldorf. Gebr. Helfmann und Leiter der Niederlassungen dieser Firma in Berlin, Halle, Leipzig und Magdeburg und Vorstand der Bauwerk AG. für Untergrundbahn- und Tunnelbau in Berlin.

Als Regierungsbauführer betätigte er sich als Assistent bei der Breslauer an der Technischen Hochschule Berlin und als Regierungsbaumeister in der gleichen Eigenschaft bei Grüning an der Technischen Hochschule Hannover. Dabei sammelte er seine ersten Erfahrungen in der Lehrtätigkeit.

1932 folgte er als Nachfolger von Prof. Otzen einem Ruf an die Technische Hochschule Hannover und übernahm als o. Professor den Lehrstuhl für Massivbau und für Statik der Baukonstruktionen und auch das Lehrgebiet „Baustoffkunde“. Mit der Berufung nach Hannover wurde er gleichzeitig Direktor des Instituts für Bauingenieurwesen und der Straßenbauforschungsstelle dieser Hochschule. Solcher förderte er das Zustandekommen des Niedersächsischen Prüfungsamtes, dessen erster Direktor er vom Jahre 1949 bis zu seiner Emeritierung war.

Reichlich und vielseitig sind die Veröffentlichungen, in denen Prof. Gaede die Ergebnisse seiner Forschungen und Erfahrungen niedergelegt. In der letzten Zeit befaßte er sich vor allem mit der mathematischen Statistik und mit der Knicksicherheit schlanker Stahlbetonstützen.

Sein Rat wird besonders geschätzt in den technisch-wissenschaftlichen Ausschüssen. Ihnen stellte er vor allem in den Jahren seit dem Zusammenbruch seine Mitarbeit und seine vielen Erfahrungen und seine auf gründliche wissenschaftliche Arbeit gestützten überragenden Kenntnisse in hervorragender Weise zur Verfügung. Unter diesen Ausschüssen sind besonders zu nennen der Ausschuß für Einheitliche Technische Baubestimmungen, der Länder-Sachverständigen-Ausschuß für neue Baustoffe und Bauteile und vor allem der Deutsche Ausschuß für Stahlbeton, an dem Arbeiten er ganz besonderen Anteil genommen hat.

Die Mitglieder dieser Ausschüsse schätzen die vorsichtige Abwägung, vornehmlich Art Prof. Gaedes besonders hoch und wünschenswert für sich und das deutsche Bauwesen, daß er diesen Ausschüssen seine Mitarbeit und seinen Rat noch recht lange zur Verfügung stellen möge. An seinem 70. Geburtstag vereinigen sie ihre Glück-

wünsche und ihren Dank mit dem seiner Schüler und zahlreicher anderer Fachgenossen und wünschen dem Jubilar recht viele weitere Jahre in Gesundheit.

Wedler

Direktor C. Köhler †

Am 12. Juni d. J. erlag Curt Köhler, Direktor der Dyckerhoff & Widmann KG., München, in seinem 70. Lebensjahr einem tödlichen Leiden. Der Entschlafene, der 44 Jahre seiner Firma angehörte und Jahrzehnte ihre Dresdener Betonwerke leitete, trat nach deren Enteignung zur Hauptverwaltung über, in deren Rahmen er die in der Bundesrepublik gelegenen Betonwerke betreute. Die energische, zielbewußte, gleichwohl liebenswerte Persönlichkeit des Heimgegangenen stand stets in der vordersten Reihe des Geschehens der Betonsteinindustrie. An der Entwicklung und Einführung fortschrittlicher Betonwaren, beispielsweise Betonschleuderrohren, Betonmasten und Spannbetonstützen, nahm er hervorragenden Anteil. Ein besonderes unabhängiges Anliegen für die Entwicklung von Betonware und Betonwerkstein war dem in der wirtschaftlichen Organisation markant hervortretenden Fachmann die Qualitätssicherung der Betonsteinerzeugnisse, so daß er sich schon früh führend für die Einrichtung des „Güteschutz Betonstein“ einsetzte und mit der Verwirklichung krönte. Der Bundesverband der Betonsteinindustrie ehrte den verdienstvollen Förderer durch die Verleihung der Ehrenmitgliedschaft. Curt Köhlers Name wird mit der Geschichte der Betonsteinindustrie, die ihm ein unvergeßliches Andenken bewahrt, verbunden bleiben.

Nauen

Bücherschau

Löser, Benno †: Bemessungsverfahren. Zahlentafeln und Zahlenbeispiele zu den Bestimmungen des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton. Fünfte, ergänzte Auflage, bearbeitet von Regierungsrat a. D. Dipl.-Ing. Helmut Löser. 314 Seiten mit 290 Textabbildungen. 71. bis 77. Tausend der deutschen Auflagen. Berlin 1955, Wilhelm Ernst & Sohn. Ganzleinen 21,— DM.

Das den Lesern bestens bekannte Werk Löser ist nunmehr in 15. Auflage erschienen. Der Hinweis auf die hohe Auflagenzahl genügt, um den für die Fachwelt großen Nutzen des Buches darzulegen, das der um die Entwicklung des deutschen Stahlbetonbaues verdiente Verfasser vor 30 Jahren geschrieben hat. Gegenüber der vor zwei Jahren erschienenen 14. Auflage sind von seinem Sohn und jetzigen Bearbeiter, Dipl.-Ing. Helmut Löser, unter Mitarbeit von Prof. Brendel, Technische Hochschule Dresden, zahlreiche Ergänzungen vorgenommen worden.

Die wichtigsten DIN-Normen und Richtlinien, die dem Werk im Titelbogen vorangestellt sind, wurden auf den neuesten Stand gebracht.

Der Abschnitt IVo — Bruchsicherheit — erfährt eine Neubearbeitung und Erweiterung. Mit Hilfe der Tafeln 40 und 41 können Rechteck- und Rippenquerschnitte bei einfacher Biegung unter Zugrundelegung der Bruchsicherheit und der Spannungs-Dehnungslinie des Betons nach DIN 4227 bemessen werden, womit Vergleichsuntersuchungen zwischen n -freiem und n -Verfahren sowie Sicherheitsprüfungen für Biegequerschnitte möglich sind. Die Bemessungstafel 43 — Einfach bewehrte Rippenquerschnitte für beliebige Spannungen — wurde neu aufgenommen.

Im Hinblick darauf, daß nach Tafel III der Richtlinien für Fertigbauteile (DIN 4225) und nach Tafel 7 der Berechnungsgrundlagen für massive Brücken (DIN 1075) für die höchsten Güteklassen höhere Betonspannungen zugelassen sind, wurden die Tafeln für Rechteckquerschnitte im Abschnitt IV entsprechend erweitert. Die unter besonderen Bedingungen auf 2800 kg/cm² erhöhte zulässige Spannung für Betonrippenstahl IVa ist in der neuen Tafel 58 berücksichtigt worden.

Auf Grund der neuen Richtlinien für querverrippten Betonformstahl wurde auch der Abschnitt XIII — Sonderbewehrungen — überarbeitet. Dieser Abschnitt enthält im übrigen neuerdings Angaben über NORI-Stahl, flachverdrehen Neptunstahl St 80/120 und zwei neu zugelassene Bewehrungsmatten der Stahlgruppe IVb.

Auch die neue Auflage des drucktechnisch wiederum vorzüglich ausgestatteten Buches bleibt wie seither ein hervorragendes, zeitgemäßes Hilfsmittel für alle Ingenieure, die Stahlbetonbauten zu entwerfen haben.

Kaufmann

Deutscher Ausschuß für Stahlbeton. Heft 123. Eigenschaften und Wirkung luftporenbildender Zusatzmittel bei der Verwendung zu Beton. Stand der Erkenntnisse: von Kurt Walz, Stuttgart. Schrifttum der Jahre 1944 bis 1954: von Kurt Walz und Else Hartmann, Stuttgart. Berlin 1956. Vertrieb durch Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn. Preis geheftet DM 9,—.

Als Zusammenfassung aus 212 Abhandlungen des internationalen Schrifttums der Jahre 1944 bis 1954, über die im 2. Teil

des besprochenen Heftes in Auszügen berichtet wird, ist der Stand der Erkenntnisse um die Luftporenbildner dargestellt. Verfolgt werden die Wirkungsweise der LP-Stoffe, die Einflüsse der Art des LP-Stoffes, der Zementart, der Zuschlagstoffe, des Wassers und der Verarbeitung auf die Betoneigenschaften, und zwar sowohl auf die Frischbetoneigenschaften (Erstarren, Wasseranspruch, Verarbeitbarkeit) als auch hinsichtlich der Festbetoneigenschaften, besonders der Beständigkeit, der Festigkeit, des Verschleißwiderstandes, der Porenstruktur, der Wasseraufnahme und der Raumänderungen. Abschließend wird die Prüfung der LP-Stoffe und des LP-Betons in USA und in Deutschland erörtert. Ein Sachverzeichnis leitet schnell zu den Quellen des Schrifttums.

Die ausgezeichnete Zusammenfassung der bisherigen Feststellungen in aller Welt und der Deutungsversuche der Ergebnisse gibt dem Baupraktiker willkommenen Aufschluß darüber, was bei der Anwendung der LP-Stoffe unter den verschiedenen Bedingungen der Betonkomponenten und der Arbeitsweisen zu beachten ist und welcher Erfolg bei sachgemäßer Anwendung erwartet werden darf. Dem forschenden Betontechnologen rundet sich das Bild dessen, was als gesicherter Tatsachenbestand gelten darf und was dabei geklärt bzw. noch offen ist. Die LP-Stoffe verbessern zwei Betoneigenschaften, für deren eindeutige Ermittlung es aber bis zur Stunde noch keine voll befriedigenden Verfahren gibt, die Verarbeitbarkeit und die Frostbeständigkeit. Wenige Prozent der Sonderporen verbessern die Verarbeitbarkeit des Frischbetons; die Vermehrung der Normalporen im erhärteten Festbeton durch wenige Prozent Sonderporen erhöht die Frostbeständigkeit, angeblich weil diese Sonderporen eine Polsterwirkung ausüben. Da diese Wirkung indessen bei Kristallisationsdrücken auskristallisierender Salzlösungen ausbleibt bzw. nicht nachgewiesen ist, kann diese Deutung noch nicht befriedigen, ohne daß man am Tatsachenbestand selbst zweifeln könnte. Der Forschung ist noch ein weites Feld der Betätigung gewiesen.

Hummel

Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 119: Graf und Weil: Versuche über den Verbund zwischen Stahlbeton-Fertigbalken und Ortbeton. Bei: Versuche mit Stahlleichtträgern für Massivdecken. 36 S. mit zahlreichen Tab. u. Abb. Berlin 1955. Vertrieb durch Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Preis DM 10,20.

Bei der Verwendung von Betonfertigteilen für Hohlsteindecken, die nachträglich eine Druckzone aus Ortbeton erhalten, ist die Frage nach der Schubfestigkeit zwischen neuem und altem Beton von größter Wichtigkeit. Sie wurde an 3 m langen, überbewehrten Balken studiert, wobei die Wirkung einer Verzahnung, einer Verbügelung und verschiedener Steghöhen bei gleichbleibender Gesamthöhe untersucht wurde. Hierüber berichten Graf und Weil im ersten Teil des Heftes („Versuche über den Verbund zwischen Stahlbeton-Fertigbalken und Ortbeton“).

Zunächst zeigte sich, daß für einen gleichförmig belasteten Balken überhaupt kein Unterschied der verschiedenen Ausgestaltungen der Berührungsfächen erkennbar war, da sämtliche Balken durch Zerstörung der Druckzone infolge Biegung zu Bruch gingen. Erst als man durch Auseinanderrücken der beiden Einzellasten bei gleichbleibendem Moment die Querkraft etwa auf den doppelten Wert brachte, konnte ein Bruch durch Überwindung der Schubfestigkeit zwischen Ort- und Fertigbeton erreicht werden. Überraschenderweise zeigte sich, daß weder die Verbügelung noch die Verdübelung einen wesentlichen Einfluß auf die Haftfestigkeit zwischen beiden Betonarten besitzt und diese nur zwischen 22 und 26 kg/cm² schwankt.

In dem Bericht werden ältere Versuche angeführt, bei denen sich unter ähnlichen Verhältnissen eine Schubfestigkeit von 22 kg/cm² ergab. Andere Versuche mit waagerechter Anschlußfuge zwischen altem und neuem Beton zeigten jedoch nur eine Schubfestigkeit von 5 kg/cm². Die Haftung neuen Betons an bereits vorhandenem lieferte daher bei senkrechten Anschlußfugen eine 4...5mal so große Haftfestigkeit.

Im zweiten Teil des Heftes berichtet Weil („Versuche mit Stahlleichtträgern für Massivdecken“) über Versuche, bei denen zwei Einwände gegen Stahlleichtträger als Bewehrung von Hohlsteindecken behandelt wurden, und zwar deren Tragfähigkeit im Montagezustand und deren Gefährdung durch Rost. Hierzu wurden 6 verschiedene Fabrikate derartiger Stahlträger für 5 m Spannweite zunächst ohne Deckensteine mit voller Spannweite und dann mit Deckensteinen und Zwischenunterstützung in der Mitte unter Hinzufügen einer Belastung auf den Steinen gleich dem Betongewicht und einer zusätzlichen Nutzlast von 150 kg/m² geprüft. Es zeigte sich, daß sämtliche Decken ihr eigenes Gewicht und dasjenige der Steine auf die endgültige Spannweite frei tragen, für die zusätzliche Belastung jedoch meistens der Zwischenunterstützung bedürfen. Mit dieser waren jedoch sämtliche Träger in der Lage, mindestens die

doppelte Gebrauchslast aufzunehmen, obgleich die in praxi vorhandene Einbettung des Obergurtes durch den Beton bei den Versuchen fehlte. Selbstverständlich ist bei diesen äußerst leichten Profilen die Sicherheit die Stabilität maßgebend, so daß nicht nur die Durchbiegungen, sondern auch die seitlichen Ausbiegungen und Verdrehungen gemessen wurden. Letztere sind naturgemäß bei den seitig belasteten Randträgern besonders groß (bis zu 30°), je bestand bei keiner Decke die Gefahr des Abrutschens der Steine.

Bezüglich der Durchbiegungen bestanden erhebliche Unterschiede zwischen den einzelnen Bauarten, wobei naturgemäß die schwächeren Träger und besonders 2 Modelle mit bereits im Anlieferungs- einbetoniertem Untergurt die geringsten Werte aufwiesen.

Die Umhüllung der Trägerobergurte und Stege mit Ortbeton sich im allgemeinen einwandfrei bewerkstelligen, sofern der Abstand zwischen Steg und Stein breiter als 2 cm war. Die Umhüllung des Untergurtes befriedigte teilweise weniger. Man müßte hierzu Körnungen, weichen Mörtel verwenden, der sorgfältig eingebracht und verdichtet wird, sofern nicht der Untergurt von unten sichtbar bleibt, so daß er durch Anstrich oder Zementputz vor Rost geschützt werden kann. Am besten ist der Rostschutz naturgemäß bei denjenigen Trägern gewährleistet, deren Untergurt von vornherein mit Beton umhüllt ist.

Fra

S z a b ó, I.: Höhere Technische Mechanik. XII, 472 S. mit 402 Abb. Berlin 1956. Julius Springer. Ganzleinen DM 31,50.

Als Ergänzung und Fortsetzung seiner „Einführung in die Technische Mechanik“¹⁾ legt der Verfasser nunmehr den Band „Höhere Technische Mechanik“ vor. Das Werk zerfällt in vier Hauptabschnitte.

Mit Bedacht wurden die Prinzipien der Mechanik an den Anfang gestellt. An das Prinzip der virtuellen Verrückungen für starre deformierbare Körper schließt sich das D'Alembertsche Prinzip, dem die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen sowie das Hamilton'sche Prinzip hervorgehen.

Für die Leser dieser Zeitschrift ist von besonderem Interesse der zweite Abschnitt, der sich mit der höheren Elastizitätstheorie beschäftigt. Zunächst wird der allgemeine Spannungszustand und der Verformungszustand der linearen Elastizitätstheorie beschrieben, dem sich der achsensymmetrische sowie der ebene Spannungszustand als Sonderfälle entwickeln lassen. Daran schließt sich ein Kapitel über Biegung und Schwingung dünner Platten (Kirchhoffsche Platten-theorie) sowie eine Einführung in die Schalentheorie (Rotations-schalen). Den Abschluß bilden zwei Kapitel über Torsion mit und ohne Wölbbehinderung sowie über Instabilitätsprobleme (Knicken, Beulen).

Auch der dritte Abschnitt, der einen Einblick in die Plastizitätstheorie bringt, ist für den Bauingenieur von großer Wichtigkeit. Nach einer Besprechung der verschiedenen Fließ- und Bruchtheorien werden die Theorien von Hencky, Mises, Prandtl-Reuß besprochen. Als Anwendungsbeispiele behandelt der Verfasser plastische Biegung und Torsion von Balken sowie das unelastische Knicken nach Engesser-Kármán sowie Shanley.

Der vierte Abschnitt bringt die Theorie der Flüssigkeiten und Gase. Behandelt werden die Bewegungen idealer und zäher Flüssigkeiten sowie idealer Gase. Potentialtheoretische Betrachtungen dynamischer Probleme sowie ein Kapitel über Verdichtungs-schläge beschließen diesen letzten Abschnitt.

Besonders zu begrüßen ist, daß der Verfasser auch im vorliegenden Band die mathematischen Hilfsmittel, soweit sie nicht allgemein bekannt vorausgesetzt werden können, selbst entwickelt. So findet man z. B. eine Einführung in die Variationsrechnung, die Lösung von Differentialgleichungen mittels der Störungsrechnung, die Methode der konformen Abbildungen und vieles mehr. Wo strengen mathematischen Lösungen der Probleme noch aussteht, bzw. diese zu kompliziert sind, wurden Näherungslösungen angegeben, so z. B. das Verfahren von Ritz bzw. Rayleigh.

73 Aufgaben nebst Lösungen geben dem Leser die Möglichkeit den Stoff zu üben; sie vermitteln ferner vielerlei interessante Einblicke in die mannigfaltigen Probleme.

Durch die gründliche und übersichtliche Darstellung ist das Werk sowohl als Lehrbuch als auch zum gelegentlichen Nachschlagen besonders geeignet.

Wor

¹⁾ Besprechung dieses Werkes s. B. u. St. 1955, Heft 7, S. 202

Eingegangene Bücher

Die Schriftleitung behält sich vor, die nachstehend aufgeführten Neuerscheinungen gelegentlich zu besprechen.

Kuvitz: Lohnt sich ein Baukran? Kostenanalyse des Kraneinsatzes, Wirtschaftlichkeit der Turmdrehkrane, kalkulatorische Verrechnung u. a. 104 S. mit 15 Abb. Wiesbaden 1956, Krauskopf-Verlag, Kart. 6,80 DM.

„Beton- und Stahlbetonbau“, Lizenz Nr. 271, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169, Fernsprecher: 87 1556. Schriftleitung: Reg.-Baumeister Erich Bornemann, geschäftsführendes Vorstandsmitglied des Deutschen Beton-Vereins, (16) Wiesbaden-Eigenheim, Prinz-Nikolas-Str. 19, und Prov.-Oberbaurat Dipl.-Ing. Hermann E. (20a) Celle, Fuhrberger Str. 117. Für den Anzeigenteil verantwortlich: Otto Swoboda, Berlin-Wilmersdorf. Anzeigenpreisliste Nr. 2. — Druck: H. Heenemann KG, Berlin-Wilmersdorf. Nachdruck, fotografische Vervielfältigungen, fotomechanische Wiedergabe von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus nur mit Genehmigung des Ver-